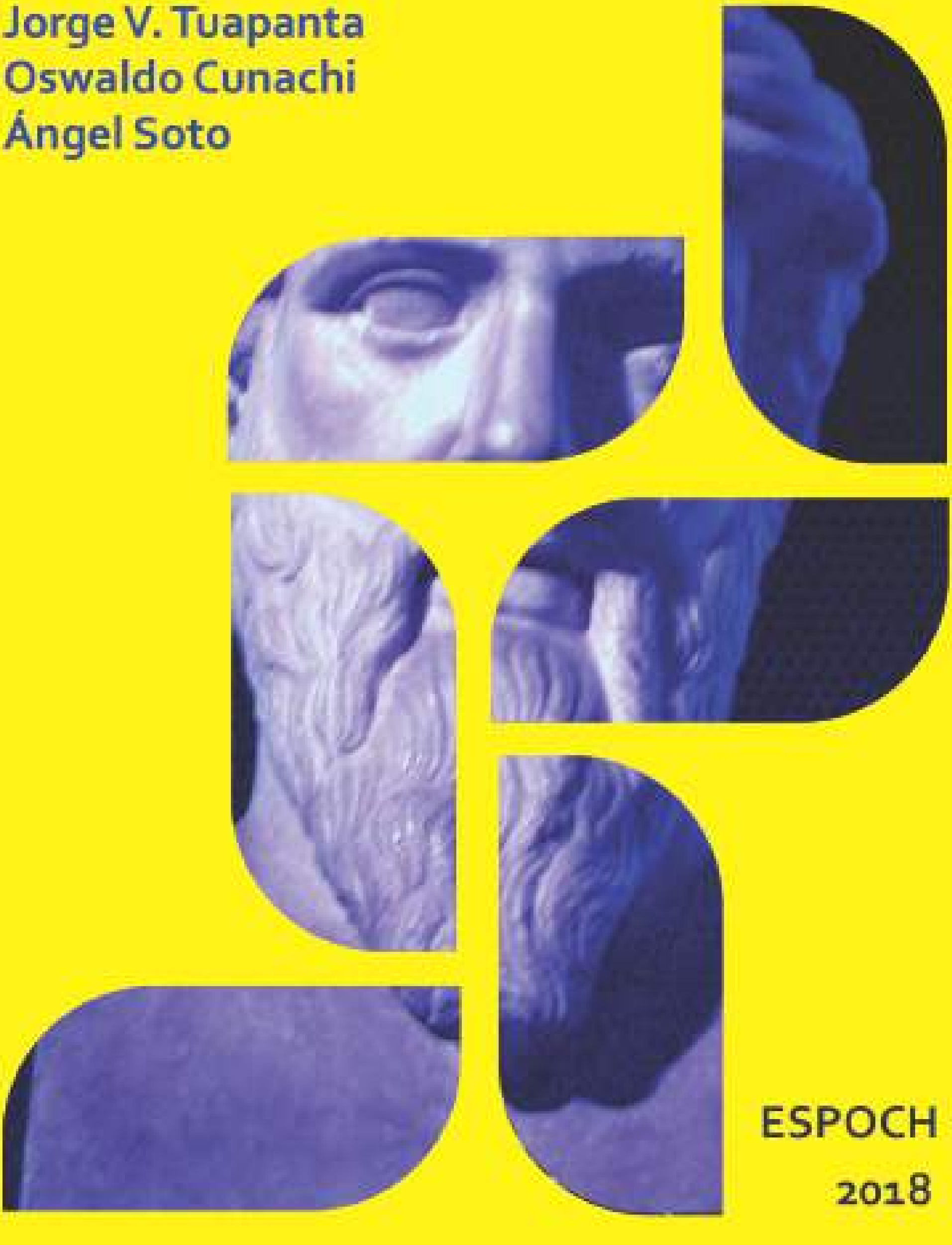
Matemática y trigonometría

Jorge V. Tuapanta
Oswaldo Cunachi
Ángel Soto



ESPOCH
2018

MATEMÁTICA
Y TRIGONOMETRÍA

MATEMÁTICA Y TRIGONOMETRÍA

AUTOR

Jorge Tuapanta

COLABORADORES

Oswaldo Cunachi,

Ángel Soto

MATEMÁTICA Y TRIGONOMETRÍA

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½
Dirección de Publicaciones Científicas
Riobamba, Ecuador
Teléfono: (593 3) 299 8200
Código Postal: EC060155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*).

Corrección y diseño:
La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

CDU: 514.11 Matemática y trigonometría
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Dirección de Publicaciones, año 2018
335 pp. vol: 17 x 24 cm
ISBN: 978-9942-35-639-0
1. Matemáticas
2. Geometría
3. Trigonometría

PRÓLOGO

Este libro de Matemática y trigonometría está estructurado en ocho capítulos que comprenden lógica proposicional; teoría de conjuntos; teoría de números; ecuaciones y desigualdades, relaciones y funciones, funciones exponenciales y logarítmicas; trigonometría; y aplicaciones de la trigonometría.

El propósito de este libro es proporcionar a estudiantes universitarios de los primeros semestres de las escuelas de ingeniería las herramientas necesarias para la resolución de problemas de matemática básica, que les servirán para posteriores estudios de cálculo diferencial e integral. En este texto, solo se demuestran algunos de los teoremas que se presentan,en aquellos que no se hace la demostración, se hace énfasis en la correcta aplicación para resolver los ejercicios.

En cada unidad se trabaja con una gran variedad de problemas de diversos-grados de dificultad, y se exponen todos los pasos que implica la resolución de estos,con la finalidad de ayudar al estudiante a comprender la teoría y que le den las bases necesarias para resolver los problemas aplicados.

El libro es fruto del trabajo de algunos años de experiencia docente y compartir con los estudiantes conocimientos y aprendizajes de un lado y otro. La elaboración del texto se hizo pensando en el estudiante, para que pueda utilizarlo con facilidad y que en él encuentre la teoría necesaria y ejercicios resueltos que le sirvan de guía para resolver otros y los que se propone aquí.

Jorge Tuapanta

DEDICATORIA

A mi ángel de la guarda, mi madre

mis hermanos

y

mi padre

CAPÍTULO 1 LÓGICA PROPOSICIONAL

1.1 Introducción

La lógica proposicional nos ayuda a codificar y entender los enunciados para determinar la validez de estos. A través de ella se evalúa la veracidad de expresiones gramaticales y matemáticas, utilizando las leyes de los conectivos lógicos que en ellas aparezcan y tomando en cuenta la jerarquía de los conectivos existentes en la expresión.

Definición 1.1. Una proposición es un enunciado atemporal en el que se declara algo y al que podemos asignar un valor de verdadero (V) o falso (F), pero no los dos a la vez.

Por enunciado atemporal se entenderá que, independientemente del tiempo, el enunciado siempre sea verdadero o falso.

Ejemplos.

1 .Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales.

2. Todo número entero es un número racional.

3. Por dos puntos pasan infinitas rectas.

4. El vacío es subconjunto de todo conjunto.

5. La semana tiene ocho días.

6. El año tiene 12 meses.

7. En todo triángulo, la suma de los ángulos internos es menor a 180º.

A cada uno de los ejemplos dados se le puede asignar un solo valor de verdad, ya sea verdadero o falso.

Notas:

1) Los enunciados que sean verdaderos o falsos dentro de un determinado-tiempo no serán considerados proposiciones.

2) Las expresiones que encierran un sentido de pregunta, orden, exclamación y todo aquello que no diga nada en concreto no son proposiciones.

Ejemplos.

1. La población de Guayaquil es la más grande del Ecuador.
2. Hoy es un soleado.
3. Einsten es el físico más famoso del mundo.
4. ¡Qué linda estás!
5. ¿A dónde iré cuando muera?
6. ¡Vete de mi vida!

Los tres primeros enunciados serán verdaderos o falsos dependiendo del tiempo y del sujeto que lo analice, lo que nos lleva a afirmar que no son proposiciones.

A las tres últimas expresiones, dado que no se les puede dar un valor de verdad, no son proposiciones.

A las proposiciones, las denotaremos con las letras: p, q, r, s, t, etc.

Ejemplos.

p: Quito es la capital de España.

q: El conjunto de los números naturales es un subconjunto de los enteros.

r: El vacío es subconjunto de todo conjunto.

t: Por dos puntos pasa una sola recta.

Definición 1.2. Una proposición simple es aquella que no es susceptible de ser descompuesta; en el caso de serlo, se llama compuesta.

Definición 1.3 (Negación). La negación de una proposición p, que la denotamos con $\sim p$ (se lee no p), se obtiene anteponiendo un "**no**" o "**no es cierto que**".

Ejemplos.

1. p: Los hombres son mortales.

   $\sim p$: Los hombres no son mortales.

2. q: El conjunto de los números naturales contiene a los números enteros.

   $\sim p$: No es cierto que, el conjunto de los números naturales contiene al conjunto de los números enteros.

3. t: Un número irracional se puede expresar como un número racional.

   $\sim t$: Un número irracional no se puede expresar como un número racional.

La negación es un conectivo lógico que no relaciona dos proposiciones simples para darnos una proposición compuesta, sino que nos da una nueva proposición simple.

Los valores de verdad que toma la proposición $\sim p$ a partir de la proposición p sigue la siguiente regla:

Si *p* es verdadera, su negación es falsa y viceversa (ver tabla 1.1).

p	$\sim p$
V	F
F	V

Tabla 1.1. Tabla de verdad de la negación

Definición 1.4 *(Conjunción)*. La conjunción relaciona dos proposiciones simples p y q. A la proposición p y q se la llama proposición conjuntiva y la denotamos con $p \wedge q$ (se lee p y q).

Ejemplos.

1. Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales y dos ángulos congruentes.

2. El conjunto de los números racionales es un subconjunto de los reales y de los complejos.

3. Un triángulo equilátero tiene tres lados iguales y tres ángulos congruentes.

4. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ y $\pi \in \mathbb{R}$.

Los valores de verdad que toma la proposición conjuntiva $p \wedge q$ a partir de las proposiciones simples p y q siguen la siguiente regla:

La proposición conjuntiva $p \wedge q$ es verdadera si sus componentes son verdaderos; en los demás casos es falsa (ver tabla 1.2).

p	q	$p \wedge q$
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 1.2. Tabla de verdad de la conjunción

Definición 1.5 (Disyunción inclusiva). La disyunción relaciona dos proposiciones simples p y q. A la proposición p o q se le llama proposición disyuntiva y la denotamos por $p \vee q$ (se lee p o q).

La "o" que une las proposiciones p y q, se la utiliza en "sentido inclusivo", esto significa que se puede cumplir lo que señala la proposición p o lo que señala la proposición q, o las dos cosas la vez.

Ejemplos.

1. $\sqrt{7}$ pertenece ($\in$) a los racionales ($\mathbb{Q}$) o a los reales ($\mathbb{R}$).

2. Las soluciones de una ecuación de segundo grado pueden ser reales o complejas.

3. El valor de verdad de una proposición puede ser verdadero o falso.

Los valores de verdad que toma la proposición disyuntiva $p \vee q$ a partir de las proposiciones simples p y q siguen la siguiente regla:

La proposición disyuntiva $p \vee q$ es falsa si sus componentes son falsas; en los demás casos es verdadera (ver tabla 1.3).

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 1.3. Tabla de verdad de la disyunción.

Definición 1.6 (Condicional o implicación). A la proposición, si p entonces q, se le llama proposición condicional y la denotamos por $p \rightarrow q$ (se lee p implica q). En una proposición condicional, a p se le conoce como **antecedente** (o hipótesis) y a q como **consecuente** (o tesis).

Ejemplos.

1. Si dos rectas son paralelas, entonces sus pendientes son iguales.

2. Si, en la ecuación de segundo grado, el discriminante es menor que cero, entonces sus raíces son complejas.

3. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

Los valores de verdad que toma la proposición $p \rightarrow q$,a partir de las proposiciones simples p y q siguen la siguiente regla:

La proposición condicional $p \rightarrow q$ es **falsa**, si su **antecedente** es **verdadero** y su **consecuente** es **falso**, en los demás casos es verdadera (ver tabla 1.4).

p	q	$p \to q$
V	V	**V**
V	**F**	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Tabla 1.4. Tabla de verdad de la implicación

Definición 1.7 (Bicondicional). A la proposición, p si y solo si q, se le llama proposición bicondicional, y lo denotamos por $p \leftrightarrow q$ (se lee p si y solo si q).

Ejemplos.

1. Dos rectas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es igual a -1.
2. Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.
3. Un triángulo es equilátero si y solo si sus tres lados son congruentes.

Los valores de verdad que toma la proposición $p \leftrightarrow q$, a partir de las proposiciones p y q, siguen la siguiente regla: **la proposición bicondicional $p \leftrightarrow q$ es verdadera, si sus componentes tienen el mismo valor de verdad; en los demás casos es falsa** (ver tabla 1.5).

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	V
F	**F**	**V**

Tabla 1.5. Tabla de verdad del bicondicional

Definición 1.8 (Conjuntiva Negativa). A la proposición ni p ni q se le llama proposición conjuntiva negativa y la denotamos con $p \downarrow q$ (se lee ni p ni q).

Ejemplos.

1. Ni el conjunto de los números naturales ni el de los reales es finito.
2. Ni Riobamba ni Ambato son la capital del Ecuador.
3. Ni el sol ni la luna son planetas.
4. Ni más infinito ni menos infinito son números reales.

Los valores de verdad que toma la proposición $p \downarrow q$ a partir de las proposiciones simples p y q siguen la siguiente regla:

La proposición conjuntiva negativa $p \downarrow q$ es verdadera si sus componentes son falsas; en los demás casos es falsa(ver tabla 1.6).

p	q	$p \downarrow$ q
V	V	**F**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	**F**	**V**

Tabla 1.6. Tabla de verdad de la conjunción negativa

Definición 1.9 (Disyunción exclusiva). A la proposición p o q pero no las dos a la vez se la llama proposición disyuntiva en sentido exclusivo, y la denotamos por $p \veebar q$ (se lee p o q, pero no las dos a la vez).

Ejemplos.

1. -2 pertenece a los números enteros ($\mathbb{Z}$) o los naturales ($\mathbb{N}$).
2. La tierra es redonda o elíptica.
3. Los hombres son mortales o inmortales.
4. El conjunto de los naturales es finito o infinito.
5. Quito es la capital del Ecuador o de Colombia.

Los valores de verdad que toma la proposición $p \veebar q$ a partir de las proposiciones p y q siguen la siguiente regla:

La proposición $p \veebar q$ es falsa si sus componentes tienen el mismo valor de verdad; en los demás casos es verdadera (ver tabla 1.6).

p	q	$p \veebar$ q
V	**V**	F
V	F	V
F	V	V
F	**F**	F

Tabla 1.6. Tabla de verdad de la disyunción exclusiva

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Simbolizar las siguientes proposiciones:

a) Si dos es un número entero, entonces su raíz cuadrada es un número entero o un irracional, pero no las dos cosas a la vez.

Saquemos las proposiciones simples:

p: Dos es un número entero.

q: La raíz cuadrada de dos es un número entero.

r: La raíz cuadrada de dos es un número irracional.

Simbolizando la proposición dada nos queda: $p \rightarrow (q \vee r) \wedge \sim (q \wedge r)$.

b) Si el triángulo es isósceles, entonces tiene dos lados y ángulos congruentes. Las proposiciones simples son:

p: El triángulo es isósceles.

q: El triángulo tiene dos lados iguales.

r: El triángulo tiene dos ángulos congruentes.

Simbolizando la proposición dada nos queda: $p \rightarrow q \wedge r$

2. Si p y q son verdaderos y r y s son falsos, determinar el valor de verdad de las proposiciones:

a. $(q \vee r) \wedge (p \vee s)$

$(q \vee r) \wedge (p \vee s)$						
V	V	F	**V**	V	V	F

Tabla 1.8. Tabla de verdad de la proposición del literal a)

La proposición dada es verdadera.

b. $(r \rightarrow p) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow r)$

$(r \rightarrow p) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow r)$							
F	V	V	**V**	F	V	V	F

Tabla 1.9. Tabla de verdad de la proposición del literal b)

La proposición es verdadera.

c. $r \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge \sim (r \wedge s)] \vee \sim p$

$r \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge \sim (r \wedge s)] \vee \sim p$												
F	**F**	V	V	V	V	F	F	F	F	V	F	V

Tabla 1.10. Tabla de verdad de la proposición del literal c)

La proposición es falsa.

Nota: en una proposición compuesta, si no se especifica a través de los signos de agrupación, el conectivo lógico de mayor jerarquía se considera el de implicación y bicondicional con relación a los de negación, conjunción y disyunción. Y el bicondicional, más fuerte que el de implicación.

EJERCICIOS PROPUESTOS 1.1.

1. De las siguientes afirmaciones, determine las que son proposiciones e indique cuál es su valor de verdad. Además, indique si es proposición simple o compuesta.

a. Los ángulos internos de un triángulo.

b. El conjunto de los números enteros y racionales son conjuntos infinitos.

c. El conjunto de los números enteros contiene a los naturales.

d. Los mejores días de mi vida los estoy disfrutando.

e. Este será el más lindo de mis días.

f. Te veré hoy por la noche.

g. Los doce meses del año.

h. Este es el día más feliz de mis días.

i. Seré aire si tú eres ave.

j. El vacío es subconjunto de todo conjunto.

k.Todo número racional es entero.

l.Por dos puntos pasan infinitas rectas.

m.La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

n.Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales.

o.Si las rectas son paralelas, entonces tienen la misma pendiente.

p.Tú eres el amor de mi vida.

q.Da gracias por cada cosa que te da la vida.

2. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

a. $2\sqrt{2}=8 \vee (2+3)^2 = 25 \rightarrow \log 0 = 1 \wedge \sqrt{3} < \pi$

b. $\sqrt{x^2} = |x| \downarrow 6^0 = 0 \leftrightarrow 3\sqrt{0} = 1 \rightarrow \log 1 = 0$

c. $\log(-1)=0 \vee \sqrt[3]{-8} = -2 \rightarrow 8 \leq 0 \wedge \sqrt{2} \in \mathbb{Z}$

d. $x^2 \geq 0 \wedge |-2| = -2 \leftrightarrow e^0 = 1 \rightarrow \sqrt[4]{16} = \pm 2 \vee \sqrt[4]{16} = 2$

e. $p \vee q \rightarrow r \leftrightarrow q \downarrow p$, cuando p es verdadero y los demas son falsos.

f. $\neg s \leftrightarrow \neg q \rightarrow p \wedge \neg t$, cuando t es falso y las demás verdaderos.

g. $\neg (m \vee p) \vee (t \downarrow q) \rightarrow \neg p$, cuando t es verdadero y los demás falsos.

3. Representar las siguientes afirmaciones en forma simbólica. Definir claramente qué significa cada proposición.

a.Si los hombres son mortales, entonces Juan es mortal.

b.No es cierto que el conjunto de los números complejos es finito.

c.Dado que el conjunto de los números naturales es un subconjunto de lo senteros, también lo es de los racionales.

d.Un triángulo es equilátero si y solo si tiene tres lados iguales y tres ángulos congruentes.

e.En todo triángulo, la suma de los ángulos internos es igual a 180º.

f.En todo triángulo rectángulo, la suma de los ángulos agudos es igual a 90º.

g.Si las rectas no son paralelas, entonces no tienen la misma pendiente.

h.Dos rectas son perpendiculares si y solo si el ángulo entre ellos es igual a 90º.

1.3. Reglas de inferencia lógica

Tautología: una proposición compuesta que sea verdadera para cualquier valor de verdad de sus componentes se llama tautología.

Contradicción: una proposición compuesta que es falsa para cualquier valor de verdad de sus componentes se llama contradicción.

Contingencia o falacia: a una proposición compuesta que no sea ni tautología ni contradicción se lo llama contingencia o falacia.

Equivalencia lógica: se dice que las proposiciones P y Q son lógicamente equivalentes, y lo denotamos por $P \Leftrightarrow Q$, si y solo si, $P \Leftrightarrow Q$ es una tautología. El símbolo $\Leftrightarrow$ que utilizamos para la equivalencia lógica, utiliza la definición de $\leftrightarrow$ para el caso de la construcción de una tabla de verdad.

También se dice que dos proposiciones son lógicamente equivalentes si tienen idénticas tablas de verdad.

Implicación lógica: se dice que una proposición P implica lógicamente Q, y lo denotamos por $P \Longrightarrow Q$, si y solo si, $P \Longrightarrow Q$ es una tautología. El símbolo $\Longrightarrow$ que se utiliza para la implicación lógica tiene la misma definición de $\rightarrow$ para el caso de la construcción de una tabla de verdad.

Inferencia lógica: el paso que, de un conjunto de proposiciones (llamadas premisas) se obtiene como consecuencia lógica otra proposición (llamada conclusión), se denomina inferencia lógica.

La inferencia lógica es una condicional de la forma: $p_1 \land p_2 \land p_3 \land ... \land p_n \Longrightarrow q$, donde las proposiciones $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ son las premisas y q es la conclusión.

Una inferencia lógica puede ser una tautología, una contradicción o una falacia. Por lo tanto, si $p_1 \land p_2 \land p_3 \land ... \land p_n \Longrightarrow q$ es una tautología, la inferencia es válida. Entre algunas de las inferencias válidas más conocidas tenemos:

Modus ponendo ponens: $[(p \rightarrow q) \land p] \Longrightarrow q$

La regla manifiesta que, dada una proposición implicativa y su antecedente, se sigue su consecuente.

Modus tollendo tollens: $[(p \rightarrow q) \land (\sim q) \Longrightarrow (\sim p)$

La regla nos indica que, dada una proposición implicativa y la negación de su consecuente, se sigue la negación de su antecedente.

Modus tollendo ponens: $[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$ o $[(p \vee q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow p$

La regla nos indica que, dada una proposición disyuntiva y la negación de una de las proposiciones, se sigue la afirmación del otra.

Ley del silogismo hipotético: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$

La regla indica que, si el consecuente de una primera proposición condicional es el mismo antecedente de una segunda proposición condicional, entonces se puede inferir que el antecedente del primer condicional implica el consecuente del otro.

Ley del silogismo disyuntivo: $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)] \Rightarrow (r \vee s)$

La regla indica que, si se tiene dos proposiciones condicionales y la disyunción de sus antecedentes, entonces se concluye la disyunción de sus consecuentes.

Regla de Simplificación: $(p \wedge q) \Rightarrow p$ o $(p \wedge q) \Rightarrow q$

La regla indica que, de la conjunción de proposiciones, se puede inferir una de ellas.

Nota: para determinar el número de valores de verdad para la construcción de tablas de verdad de proposiciones compuestas, debemos tener en cuenta el número de proposiciones simples (n), y a partir del valor de la expresión 2^n , determinamos ese valor. Por ejemplo, si en la proposición compuesta hay tres proposiciones simples, $2^3=8$, nos indica que, en cada columna de las proposiciones simples, hay ocho valores de verdad, los mismos que están distribudos de la siguiente manera: cuatro verdaderos y cuatro falsos para la primera proposición; para la segunda, dos verdaderos y dos falsos; y para la tercera, un verdadero y un falso; asi sucesivamente hasta completar los ocho.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Demostrar las equivalencias utilizando las tablas de verdad.

a. $p \leftrightarrow q$ y $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	$\leftrightarrow$	q	$\Leftrightarrow$	p	$\rightarrow$	q	$\wedge$	q	$\rightarrow$	p
V	V	V	**V**	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	**V**	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	**V**	F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	**V**	F	V	F	V	F	V	F

Tabla 1.11. Tabla de verdad de la proposición del literal a)

Para demostrar la equivalencia se construyó la tabla de verdad de la proposición $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (vertabla1.11), y por los resultados de lacolumna de $\Leftrightarrow$, se concluye que la proposición es una tautología. Por lo tanto, las proposiciones $p \leftrightarrow q$ y $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ son lógicamente equivalentes.

b. $p \rightarrow q$ y $\sim p \vee q$

	p	$\rightarrow$ q	$\Leftrightarrow$	$\sim$	p $\vee$	q	
V	V	V	**V**	F	V	V	V
V	F	F	**V**	F	V	F	F
F	V	V	**V**	V	F	V	V
F	V	F	**V**	V	F	V	F

Tabla 1.12. Tabla de verdad de la proposición del literal b)

Al igual que en literal anterior, se construye la tabla de verdad de la proposición $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$,ver tabla1.12 y, por los resultados de la columna de $\Leftrightarrow$, se concluye que la proposición es una tautología. Por lo tanto, las proposiciones $p \rightarrow q$ y $\sim p \vee q$ son lógicamente equivalentes.

c. Demostrar que la proposición $[(p \rightarrow q)] \wedge (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ que representa a "*modus tollendo tollens*" es una inferencia válida.

Elaboremos su tabla de verdad y verifiquemos que la proposición es una tautología.

(p	$\rightarrow$	q)	$\wedge$	($\sim$	q)	$\Rightarrow$	($\sim$	p)
V	V	V	F	V	V	**V**	F	V
V	F	F	F	F	F	**V**	F	V
F	V	V	F	F	V	**V**	V	F
F	V	F	V	V	F	**V**	V	F

Tabla 1.13. Tabla de verdad de la proposición del literal c)

Por los resultados de la columna de $\Rightarrow$ en la tabla 1.13, se concluye que la proposición $[(p \rightarrow q)] \wedge (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ es una tautología; entonces, la ley del "*modus tollendo tollens*" es una inferencia válida.

d. Demostrar que la proposición $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$ que representa la ley del silogismo hipotético es una inferencia válida.

Elaboremos su tabla de verdad:

(p	$\rightarrow$	q)	$\wedge$	(q	$\rightarrow$	r)	$\Rightarrow$	(p	$\rightarrow$	r)
V	V	V	V	V	V	V	**V**	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	**V**	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	**V**	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	**V**	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	**V**	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F	**V**	F	V	F
F	V	F	V	F	V	V	**V**	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	**V**	F	V	F

Tabla 1.14. Tabla de verdad de la proposición del literal d)

Por los resultados de la columna de $\Rightarrow$ en la tabla 1.14, se concluye que la proposición $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$ es una tautología, entonces la ley del silogismo hipotético es una inferencia válida.

2. Construir la tabla de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(p \vee \sim r) \downarrow (q \vee \sim r)$

<table>
<tr><th colspan="9">$(\ p \ \vee \ \sim \ r\ ) \ \downarrow \ (\ q \ \vee \ \sim \ r\ )$</th></tr>
<tr><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>V</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>V</td></tr>
<tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td></tr>
<tr><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td></tr>
<tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td></tr>
<tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>V</td></tr>
<tr><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td></tr>
<tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td></tr>
<tr><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td></tr>
</table>

Tabla 1.15. Tabla de verdad de la proposición del literal a)

b) $(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim q \vee p)$

<table>
<tr><th colspan="9">$(\ \sim \ p \ \vee \ q\ ) \ \rightarrow \ (\ \sim \ q \ \vee \ p\ )$</th></tr>
<tr><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr>
<tr><td>F</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td></tr>
<tr><td>V</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr>
<tr><td>V</td><td>F</td><td>V</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>V</td><td>F</td></tr>
</table>

Tabla 1.16. Tabla de verdad de la proposición del literal b)

A continuación, en la tabla 1.17, se muestran algunas de las equivalencias lógicas más usadas en el algebra proposicional.

• Ley de idempotencia $p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	• Ley asociativa $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
• Ley conmutativa $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	• Ley distributiva $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

• Ley de identidad $p \vee F \Leftrightarrow p$ $p \vee V \Leftrightarrow V$ $p \wedge F \Leftrightarrow p$ $p \wedge V \Leftrightarrow p$	• Ley del complemento $p \vee \sim p \Leftrightarrow V$ $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$ $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$ $\sim V \Leftrightarrow F$
• Ley de Morgan $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$	• Ley de absorción $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$ $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$
• Ley del contrarrecíproco y composición $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$	• Ley del condicional y bicondicional $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$

Tabla 1.17. La tabla muestra algunas leyes del álgebra proposicional

1.4. Simplificación de proposiciones

La simplificación de proposiciones consiste en reducir la proposición dada, a una más simple, aplicando las leyes del algebra proposicional.

Veamos algunos ejemplos:

1. Simplificar $\sim (m \vee s) \rightarrow \sim s$

$\sim [\sim (m \vee s)] \vee (\sim s)$	Equivalente del condicional
$(m \vee s) \vee (\sim s)$	Ley del complemento
$m \vee (s \vee \sim s)$	Ley asociativa
$m \vee V$	Ley del complemento
V	Ley de identidad

2. Simplificar $[\sim (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q)] \wedge [(\sim p \vee \sim q) \vee \sim (p \vee q)]$

$[(p \wedge q) \vee (p \vee q) \wedge [(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$	Morgan, complemento
$\{[(p \wedge q) \vee p] \vee q\} \wedge \{\sim p \vee [\sim q \vee (\sim p \wedge \sim q)]\}$	Asociativa
$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$	Absorción

$(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$	Morgan

3. Simplificar $[(p \rightarrow p) \vee q] \wedge [\sim q \vee (r \wedge q)] \wedge [p \rightarrow (p \vee \sim q)]$

$[(\sim p \vee p) \vee q] \wedge [\sim q \vee (r \wedge q)] \wedge [\sim p \vee (p \vee \sim q)]$	Eq. del condicional
$[(\sim p \vee p) \vee q] \wedge [\sim q \vee (r \wedge q)] \wedge [(\sim p \vee p) \vee \sim q]$	Asociativa
$(V \vee q) \wedge [\sim q \vee (r \wedge q)] \wedge (V \vee \sim q)$	Ley del complemento
$V \vee [\sim q \wedge (r \vee q)] \wedge V$	Ley de identidad
$V \wedge V \wedge [\sim q \vee (r \wedge q)]$	Asociativa
$V \wedge [\sim q \vee (r \wedge q)]$	Ley de idempotencia
$\sim q \vee (r \wedge q)$	Ley de identidad
$(\sim q \vee r) \wedge (\sim q \vee q)$	Distributiva
$(\sim q \vee r) \wedge \mathrm{V}$	Complemento
$\sim q \vee r$	Ley de identidad

4. Simplificar $[\sim (p \vee q) \vee (\sim p \vee q)] \rightarrow (\sim p \vee q)$

$[(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q)] \rightarrow (\sim p \vee q)$	Ley de Morgan
$[\sim p \vee (\sim q \vee q)] \rightarrow (\sim p \vee q)$	Distributiva
$(\sim p \vee V) \rightarrow (\sim p \vee q)$	Complemento
$\sim p \rightarrow (\sim p \vee q)$	Ley de identidad
$\sim (\sim p) \vee (\sim p \vee q)$	Equivalencia del condicional
$p \vee (\sim p \vee q)$	Ley de complemento
$(p \vee \sim p) \vee (p \vee q)$	Distributiva
$V \wedge (p \vee q)$	Complemento
$p \vee q$	Ley de identidad

5. Simplificar $[(p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim p] \rightarrow q$

$\sim [(p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim p] \vee q$	Equivalencia del condicional
$\sim [\sim (p \rightarrow \sim q) \vee \sim p] \vee q$	Equivalencia del condicional
$\sim [\sim (\sim p \vee \sim q) \vee \sim p] \vee q$	Equivalencia del condicional
$[\sim \sim (\sim p \vee \sim q) \wedge \sim \sim p] \vee q$	Ley de Morgan
$[(\sim p \vee \sim q) \wedge p] \vee q$	Complemento
$[p \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee q$	Conmutativa
$[(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)] \vee q$	Distributiva
$[F \vee (p \wedge \sim q)] \vee q$	Complemento
$(p \wedge \sim q) \wedge q$	Ley de identidad
$q \vee (p \wedge \sim q)$	Conmutativa
$(q \vee p) \wedge (q \wedge \sim q)$	Distributiva
$(q \vee p) \wedge V$	Complemento
$q \vee p$	Ley de identidad

6. Simplificar $[(p \wedge q) \rightarrow \sim r] \vee [p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)]$

$[\sim (p \wedge q) \vee \sim r] \vee [\sim p \vee (\sim q \vee \sim r)]$	Equivalencia del condicional
$[(\sim p \vee \sim q) \vee \sim r] \vee [\sim p \vee (\sim q \vee \sim r)]$	Morgan
$\sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim p \vee \sim q \vee \sim r$	
$(\sim p \vee \sim p) \vee (\sim q \vee \sim q) \vee (\sim r \vee \sim r)$	Conmutativa y Asociativa
$\sim p \vee \sim q \vee \sim r$	Idempotencia
$\sim (p \wedge q \wedge r)$	Morgan inverso

1.5. Aplicaciones del cálculo proposicional.

La aplicación más importante del cálculo proposicional, lo tenemos en la teoría de circuitos. Un circuito está compuesto de una fuente de electricidad, un hilo conductor y un interruptor (ver figura 1.1).

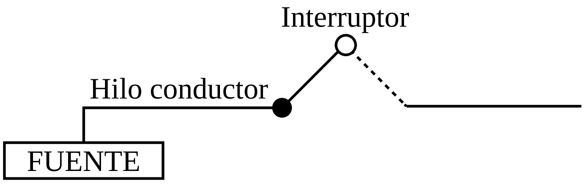


Figura 1.1. Composición de un circuito

Un circuito lo representaremos por:

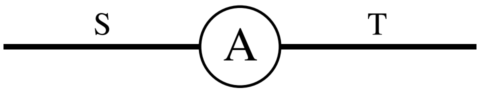


Figura 1.2. Representación de un circuito

A es el interruptor y *S*, *T* el hilo conductor, ver figura 1.2.

Si la fuente está cargada y el interruptor *A* está cerrado, por *S*, *T* circula electricidad y lo simbolizaremos por *V*; cuando el interruptor está abierto, lo denotaremos por *F*.

En el circuito en serie que se muestra en la figura 1.3, *A* y *B* son interruptores y *L* es la lámpara.

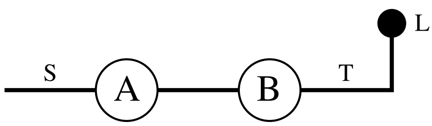


Figura 1.3. Circuito en serie

Analicemos cada uno de los estados de un circuito en serie: a. Los interruptores *A* y *B* están cerrados; *L* está prendida (ver figura 1.4).

A	B	L
V	V	V

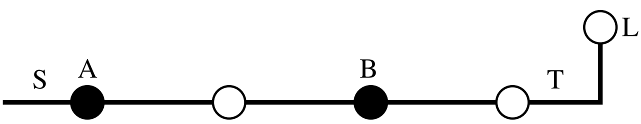


Figura 1.4. Circuito en serie, con *A* y *B* cerrados

b. El interruptor *A* está cerrado y *B* abierto; *L* está apagada (ver figura 1.5).

A	B	L
V	F	F

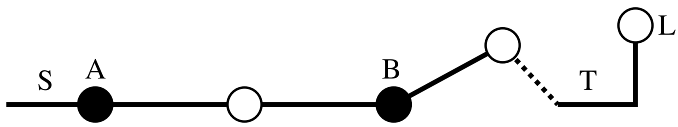


Figura 1.5. Circuito en serie, con *A* cerrado y *B* abierto

c. El interruptor *A* está abierto y *B* está cerrado; *L* está apagada, (ver figura 1.6)

A	B	L
F	V	F

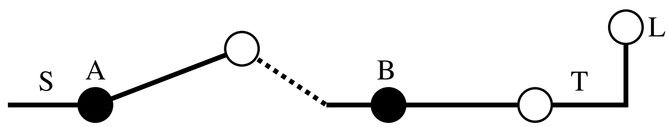


Figura 1.6. Circuito en serie, con *A* abierto y *B* cerrado

d. Los interruptores *A* y *B* están abiertos; *L* está apagada, (ver figura 1.7).

A	B	L
F	F	F

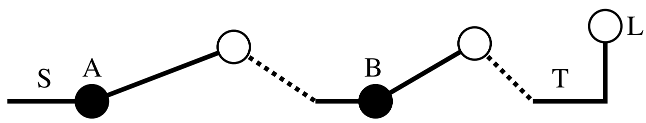


Figura 1.7. Circuito en serie, con *A* y *B* abiertos

Resumiendo, los resultados de los cuatro estados del circuito en la tabla 1.18, se observa que dicha tabla es similar a la tabla de verdad de la conjunción.

A	**B**	**L**
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Tabla 1.18. Estados del circuito en serie

Ahora analicemos los estados del circuito en paralelo que se muestra en la figura 1.8.

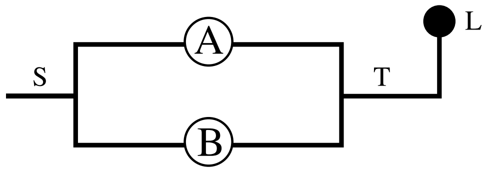


Figura 1.8. Circuito en paralelo

a. Los interruptores *A* y *B* están cerrados; *L* está prendida (ver figura 1.9).

A	B	L
V	V	V

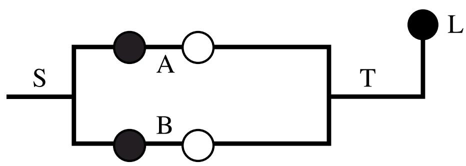


Figura 1.9. Circuito en paralelo con *A* y *B* cerrados.

b. El interruptor *A* está cerrado y *B* abierto; *L* está prendido (ver figura 1.10).

A	B	L
V	F	V

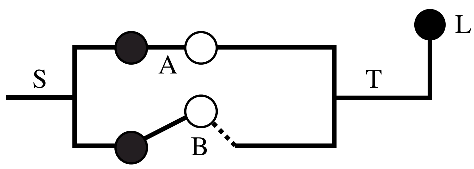


Figura 1.10. Circuito en paralelo, con *A* cerrado y *B* abierto

c. El interruptor *A* está abierto y *B* cerrado; *L* está prendida (ver figura 1.11).

A	B	L
F	V	V

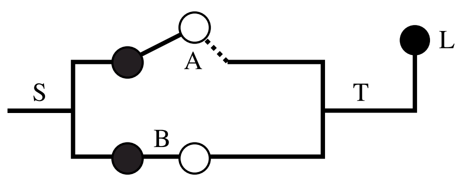


Figura 1.11. Circuito en paralelo con *A* abierto y *B* cerrado

d. Los interruptores *A* y *B* están abiertos; *L* está apagado, (ver figura 1.12).

A	B	L
F	F	F

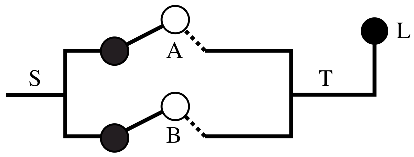


Figura 1.12. Circuito en paralelo con *A* y *B* abiertos

Resumiendo los resultados de los estados en tabla 1.19 observamos que dicha tabla es análoga a la tabla de verdad de la disyunción.

A	B	L
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Tabla 1.19. Estados del circuito en paralelo

Los circuitos que se muestran en las figuras 1.13 y 1.14 tienen posiciones opuestas; si *A* está cerrado, entonces ~*A* está abierto.

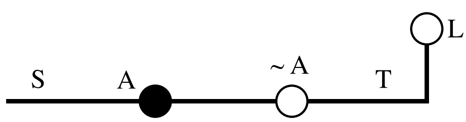


Figura 1.13. Circuito con *A* abierto y ~*A* cerrado

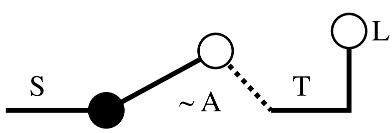


Figura 1.14. Circuito con *A* cerrado y ~*A* abierto

Los estados que permiten que la lámpara esté encendida o apagada son análogos a la tabla de negación.

Se dice que dos circuitos son equivalentes si los valores de L de cada circuito son iguales.

Utilizando la teoría de circuitos se puede reducir circuitos complejos a otros más simples, lógicamente estos serán equivalentes. (Lara Y Arroba, 2007)

Ejemplos.

1. Reducir el circuito representado en la figura 1.13.

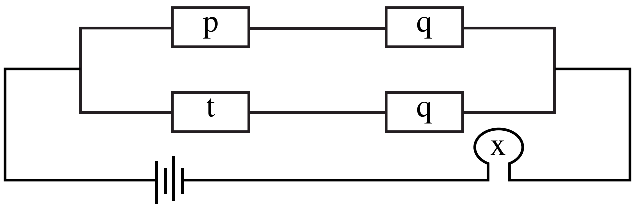


Figura 1.13. Circuito en serie y en paralelo

El circuito de la figura 1.13 está representado por la proposición $[(p \wedge q) \vee (t \wedge q)$, la misma que utilizando las leyes del algebra proposicional se reduce a $(p \vee t) \wedge q$ representada en la figura 1.14.

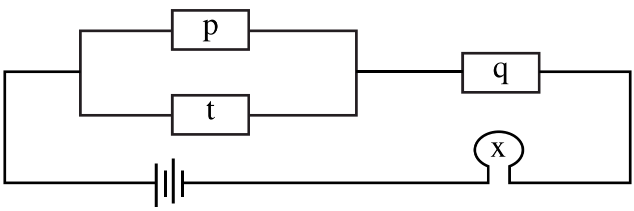


Figura 1.14. Reducción del circuito representado en la figura 1.15

2. Reducir el circuito de la figura 1.15.

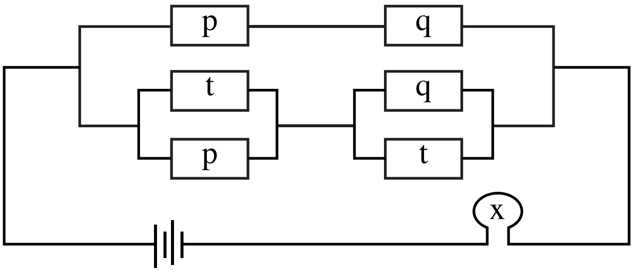


Figura 1.15. Circuito en serie y en paralelo

El circuito de la figura 1.15, está representado por la proposición $(p \wedge q) \vee [(t \vee p) \wedge (q \vee t)]$, la misma que, utilizando las leyes del algebra proposicional, se reduce a $(p \wedge q) \vee t$, representada en la figura 1.16.

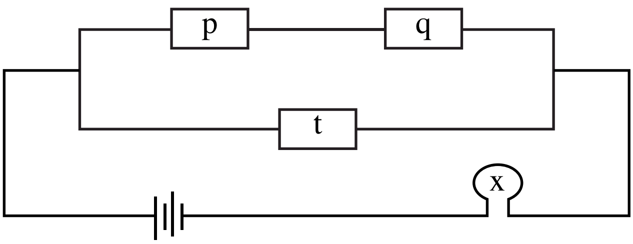


Figura 1.16. Reducción del circuito representado en la figura 1.15.

3. Reducir el circuito representado en la figura 1.17.

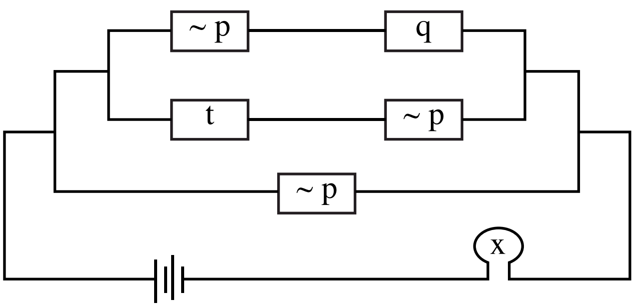


Figura 1.17. Circuito en serie y en paralelo

El circuito de la figura 1.17, está representado por la proposición $[(\sim p \wedge q) \vee (t \wedge \sim p)] \vee \sim p$, la misma que, utilizando las leyes del álgebra proposicional, se reduce a $\sim p$, representada en la figura 1.18.

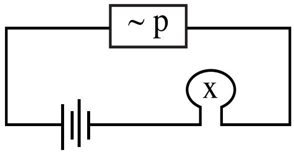


Figura 1.18. Reducción del circuito de la figura 1.17

4. Reducir el circuito representado en la figura 1.19.

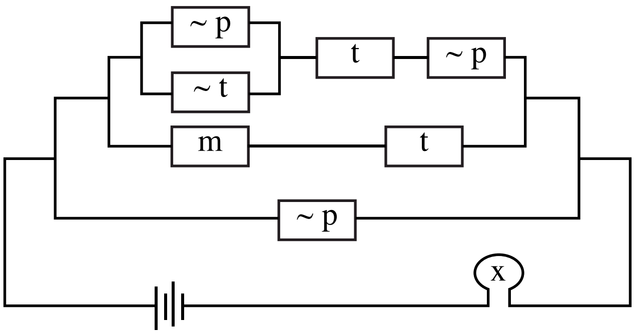


Figura 1.19. Circuito en serie y en paralelo

El circuito de la figura 1.19 está representado por la proposición:

$$\{[(\sim p \vee \sim t) \wedge (t \wedge \sim p)] \vee (m \wedge t)\} \vee (\sim p)$$

la misma que, utilizando las leyes del álgebra proposicional, se reduce a ~ p, representada en la figura 1.20.

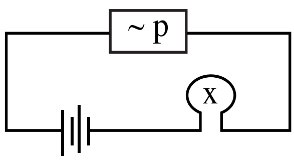


Figura 1.20. Reducción del circuito de la figura 1.19

EJERCICIOS PROPUESTOS 1.2

1. Construir las tablas de verdad de las proposiciones siguientes e identificar las que son tautologías.

a) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

b) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \sim r)] \rightarrow (p \wedge q)$

c) $p \wedge (q \vee r) \rightarrow s$

d) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

e) $[p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow p$

f) $(p \rightarrow q) \vee (p \leftrightarrow \sim q)$

g) $[p \vee (q \wedge p)] \leftrightarrow p$

2.Utilizar tablas de verdad para demostrar que las expresiones siguientes son equivalencias.

a) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

b) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

c) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$

d) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$

e) $(p \veebar q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim (p \vee q)$

f) $p \rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

g) $p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

h) $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$

i) $\sim (p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q) \vee r$

j) $(p \downarrow q) \wedge r \Leftrightarrow \sim (p \vee q) \wedge r$

k) $[(p \vee r) \wedge \sim (p \wedge q)] \vee \sim q$

l) $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \rightarrow q)$

3. Sin usar tablas de verdad, demostrar las siguientes equivalencias.

a) $[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$

b) $[(p \vee \sim q) \wedge (\sim q \wedge p)] \vee p \Leftrightarrow [p \wedge (q \rightarrow p)]$

c) $[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \downarrow (p \vee p) \Leftrightarrow \sim (q \vee p)$

d) $p \rightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$

4. Simplificar las proposiciones siguientes.

a) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

b) $[(p \vee q) \rightarrow q \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p$

c) $[\sim (p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \vee q)] \wedge q$

d) $(p \vee q) \leftrightarrow [(q \downarrow p) \downarrow (p \rightarrow q)]$

e) $[p \leftrightarrow (q \vee q)] \leftrightarrow [(p \vee q) \leftrightarrow p]$

f) $[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \downarrow (p \vee q)$

g) $\{(p \rightarrow (q \vee r) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow q)$

h) $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim (p \vee q)$

i) $\{(p \vee q) \downarrow (p \wedge \sim q)\} \wedge p$

j) $\mathrm{p} \rightarrow (\sim q \vee q) \wedge \sim q \vee (p \leftrightarrow q)$

k) $\{(\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim [(p \wedge q) \wedge \sim (\sim q \wedge p)]\} \vee \sim q$

l) $\{(s \vee t) \downarrow (s \vee s)\} \vee \sim t$

m) $\{\sim [\sim (\sim t \wedge m) \wedge (m \wedge t)] \wedge \sim (m \vee t)\} \vee \sim m$

n) $[(t \wedge s) \rightarrow \sim r] \vee [t \rightarrow (s \rightarrow \sim r]$

o) $[(r \rightarrow r) \vee s] \wedge [\sim s \vee (m \wedge s) \wedge [r \rightarrow (r \vee \sim s)]$

p) $[\sim (m \vee r) \vee (\sim m \wedge s)] \rightarrow (\sim m \wedge s)$

q) $[\sim (\sim t \vee \sim m) \vee (t \vee m)] \wedge [(\sim t \vee \sim m) \vee \sim (t \vee m)]$

5. Si la proposición $\sim s \vee \{[(p \rightarrow q) \downarrow (s \veebar w)] \rightarrow m\}$ es falsa. Halle el valor de verdad de:

a) $(q \wedge w) \rightarrow \sim (s \veebar \sim m) \leftrightarrow p$

b) $\sim [(p \downarrow s) \leftrightarrow (w \veebar \sim m)] \wedge (\sim q \rightarrow p)$

c) $(q \wedge \sim s) \rightarrow \sim (q \veebar \sim p) \leftrightarrow m$

6. Si la proposición $\sim [\sim (p \rightarrow q) \wedge (m \leftrightarrow t)] \downarrow (s \vee t)$ es verdadera, halle el valor de verdad de:

a) $(q \vee m) \rightarrow \sim (\sim s \veebar \sim m) \downarrow p$

b) $\sim [(p \downarrow t) \leftrightarrow (q \wedge \sim m)] \wedge (\sim q \downarrow s)$

c) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \sim (s \downarrow m) \vee s$

7. Si la proposición $(p \vee \sim r) \downarrow (q \vee \sim r)$ es verdadera, halle el valor de verdad de:

a) $(q \vee r) \rightarrow \sim (\sim q \veebar \sim r) \downarrow p$

b) $\sim [(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge (\sim q \vee q)$

c) $(q \wedge \sim r) \leftrightarrow (\sim q \downarrow \sim r) \rightarrow q$

8. Si la proposición $(r \wedge m) \rightarrow (p \downarrow \sim q)$, halle el valor de verdad de:

a) $(q \leftrightarrow m) \veebar (\sim p \rightarrow \sim r) \rightarrow p$

b) $\sim [(p \wedge q) \rightarrow \sim (q \vee \sim r)] \leftrightarrow (\sim m \vee r)$

c) $(\sim p \rightarrow m) \veebar (\sim m \rightarrow \sim q) \rightarrow q$

9. Representar los circuitos asociados a las proposiciones dadas.

a) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

b) $[(p \vee q) \rightarrow q \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p$

c) $[(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)] \wedge p$

d) $[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee (p \vee q)$

e) $\{ (\sim p \wedge \sim q) \wedge [(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim q \wedge p)] \} \vee \sim q$

f) $[(s \vee t) \rightarrow s] \vee \sim t$

g) $\{ [(\sim t \wedge m) \wedge (\sim m \vee \sim t)] \wedge (\sim m \wedge \sim t) \} \vee \sim m$

10. Si p, q y s son verdaderas y m, r y w son falsas, determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

a) $\sim s \veebar \{ [(p \to \sim q) \downarrow \sim (s \wedge w)] \to m \}$

b) $(r \to \sim q) \leftrightarrow \sim (s \wedge w) \downarrow m$

c) $(q \veebar \sim s) \to \sim (r \wedge \sim \mathrm{w}) \downarrow m$

d) $\sim (\sim r \vee \sim q) \leftrightarrow \sim [(m \to w) \downarrow \sim s]$

e) $(\sim m \downarrow \sim s) \veebar \sim [(m \to w) \vee \sim s]$

f) $\{ [(m \to \sim s) \downarrow \sim (r \wedge w)] \to m \} \leftrightarrow q$

g) $\{ [(r \wedge \sim w) \leftrightarrow \sim (\sim r \vee w)] \downarrow \sim p \} \leftrightarrow [\sim q \to (p \vee \sim p)]$

1.6. Función proposicional y cuantificadores

Definición 1.10. Una función proposicional es una expresión $p(x)$, $p(x, y)$, $p(x, y, z)$, etc. de una, dos, tres o más variables, las mismas que, al reemplazar sus variables por un valor determinado, estas se convierten en una proposición.

Ejemplos

1. $p(x) : (x - 2)^2 = 49$ es una función proposicional de una variable, a la que no se puede asignar un valor de verdad, porque va a depender del valor que tome x; por ejemplo, si $x = 7$, la función proposicional es falsa; si $x = 9$, la función proposicional es verdadera; en cualesquiera de los casos la función proposicional tendrá un único valor de verdad, esto lo convierte en una proposición.

2. $p(x, y) : x + y \geq 5$ es una función proposicional de dos variables, a la que no se puede asignar un valor de verdad, porque va a depender de los valores que tomen x e y; por ejemplo, si $x = 5, y = -2$, la función proposicional es falsa; si $x = -3, y = 10$, la función proposicional es veradera; en cualesquiera de los casos, la función proposicional tendrá un único valor de verdad, esto lo convierte en una proposición.

3. $p(x, y,z) : z = x^2 + y^2$ es una función proposicional de tres variables, a la que no se puede asignar un valor de verdad, porque va a depender de los valores que tomen x, y, z; por ejemplo, si $x = 4$, $y = -3$, $z = 25$, la función proposicional es verdadera; esto lo convierte en una proposición.

Otra manera de convertir una función proposicional en una proposición es añadiéndole cuantificadores asociados a las variables.

Entonces, asociados a la variable x , introducimos el cuantificador universal "para toda x", denotado por $\forall x$; y el cuantificador existencial "existe una x", denotado por $\exists x$. Para el caso de la existencia de una única x, lo denotaremos por $\exists! x$.

Si a la función proposicional $p(x)$ añadimos los cuantificadores, tendremos:

$\forall x : p(x)$ se lee "para toda x, se cumple $p(x)$ ".

$\exists x \,/\, p(x)$ se lee "existe una x, tal que se cumple $p(x)$ ".

Para que la función proposicional con el cuantificador universal sea verdadera, debe ser veradera para todas las x. Y para que la función proposicional con el cuantificador existencial sea verdadera, es suficiente que sea verdadera para almenos una x.

Ejemplos

1. $\forall\, x \in \mathbb{R} : x^3 + 9 > 0$

La proposición es falsa. Basta con tomar $x = -3$ y ver que no se cumple para todos los valores reales.

2. $\exists\, x \in \mathbb{Z} \,/\, \mathrm{x}^2 - 4 = 0 \wedge \sqrt{x} = \pi$

Para que $x^2 - 4 = 0$, existe un entero que satisface esa ecuación; pero para $\sqrt{x} = \pi$ no existe ningún entero que satisfaga. Aplicando la definición de la conjunción y sabiendo que, para el primer caso es verdad y para el segundo falso, se concluye que la proposición es falsa.

3. $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, y \in \mathbb{R} \,/\, x + y = 0$

Para cada valor real, existe su recíproco, tal que al sumarlos nos da cero, entonces la proposición es verdadera.

4. $\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R} \,/\, x + y = x$

Existe el 0 elemento de los reales que, al sumarlo a cualesquiera valores reales, nos da el mismo valor, entonces la proposición es verdadera.

5. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+ : x + y \leq 0 \vee xy > 0$

Para cualesquiera valores reales positivos su suma y producto es mayor que cero, entonces $x + y \leq 0$, es falsa, y $xy > 0$ es verdadera. Y aplicando la definición de la disyunción, se concluye que la proposición es verdadera.

6. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + y^2} < 0$

La suma de los cuadrados de cualesquiera valores reales positivos siempre será mayor o igual a cero.La raíz cuadrada de esa suma también será mayor o igual a cero. Entonces se concluye que la proposición dada es falsa.

7. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \geq 0$

Por el numeral anterior, concluimos que la proposición es verdadera.

8. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ es una identidad que es válida para cuales quiera parejas de valores reales.

Para el caso de que se desee la negación de una función proposicional con cuantificador universal, se cambia el cuantificador en existencial y se niega la función proposicional. Y para negar una función proposicional con cuantificador existencial, se cambia el cuantificador en universal y se niega la función proposicional. Es decir:

Si $\forall x : p(x)$, entonces su negación es $\exists x \,/\, {\sim}p(x)$

Si $\exists x \,/\, p(x)$, entonces su negación es $\forall x : {\sim}p(x)$

Ejemplos.

Negar las siguientes proposiciones:

1. $\forall x \in \mathbb{N} : x+1 > 8$, su negación es $\exists x \in \mathbb{N} / x+1 \leq 8$

2. $\forall y \in \mathbb{R} : y^2 \geq 0$, su negación es $\exists y \in \mathbb{R} / y^2 < 0$

3. $\forall \mathrm{x}, y \in \mathbb{N} : \mathrm{x} + y =1$, su negación es $\exists \mathrm{x}, y \in \mathbb{N} / x + y \neq 1$

4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, su negación $\exists x, y \in \mathbb{R} / (x + y)^2 \neq x^2 + 2xy + y^2$

5. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} / x + y = 0$, su negación $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} / x + y \neq 0$

6. $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} / x + y = x$, su negación $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} / x + y \neq x$

EJERCICIOS PROPUESTOS 1.3

1. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

a) $\exists! x \in \mathbb{R} / x^2 -9 < 0 \wedge x^2 -25 = 0$

b) $\exists! x \in \mathbb{N} / \sqrt{x^2 - 4} = 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R} , x \neq 0\ \exists y \in \mathbb{R} / x + y \neq 0 \wedge xy =1$

d) $\exists y \in \mathbb{R}\ x \in \mathbb{R} / x + y \neq x \vee xy = x$

e) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : x + y > 0 \veebar x^y < 0$

f) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 +3x -2 = 0$

g) $\forall x \in \mathbb{R} , x \neq 0\ \exists y \in \mathbb{R} : (x\, y =1) \vee (x\, y = x)$

h) $\forall x, y \in \mathbb{Z} : (x + y \in \mathbb{Z} \vee x\, y \in \mathbb{Z}\ x^y \in \mathbb{Z}) \downarrow \sqrt{x}\, y \in \mathbb{Z}$

2. Niegue las siguientes proposiciones.

a) $\exists! x \in \mathbb{R} / x^2 -9 < 0 \wedge x^2 -25 = 0$

b) $\forall x \in \mathbb{N} : x +5 = 5+ x$

c) $\exists x \in \mathbb{Z} / \sqrt{x^2 -16} = 0 \wedge \left| x - 4 \right| = 0$

d) $\forall x \in \mathbb{R} , x \neq 0\ \exists y \in \mathbb{R} / x + y \neq 0 \wedge xy =1$

e) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \,/\, x + y \neq x \vee xy = x$

f) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+ : x + y > 0 \vee x^y < 0$

g) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq 0$

h) $\exists \in \mathbb{R} \,/\, x + \sqrt{3} = 2\sqrt{2}$

1.7. Métodos de demostración

Las demostraciones de teoremas y proposiciones siguen un orden lógico de pasos para llegar a verificar la tesis.

En general, los teoremas y proposiciones son de la forma $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \Longrightarrow q$ donde $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ son hipótesis derivadas de un mismo problema consideradas válidas, que implican la veracidad de tesis q .

Los métodos de demostración matemática más usados son los siguientes:

Método de demostración directo

El método de demostración directo, parte de las hipótesis $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ las que se suponen verdaderas, y se deduce la verdad de la tesis q .

Ejemplo

Demostrar que, para todo n entero, si n es impar, entonces n^2 es impar.

Demostración:

Por hipótesis n es impar, esto significa que $\exists k \in \mathbb{Z} \,/\, n = 2k + 1$. Como $n = 2k + 1$, entonces $n^2 = (2k+1)^2 \Longrightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Longrightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Longrightarrow \Longrightarrow n^2 = 2h + 1$, con $h = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, n^2 es impar.

Método de demostración por contra recíproca

este método de demostración indirecto se fundamenta en la equivalencia lógica:

$$(p \to q) \Leftrightarrow (q \to p)$$

Esto significa que, para demostrar la veracidad de una proposición condicional, basta con demostrar la verdad de su contra recíproca.

Ejemplo.

Demostrar que, para todo a entero, si a^2 es par, entonces a es par.

Demostración:

En la demostración por contra recíproca, tenemos que demostrar que: si a es impar, entonces a^2 es impar. Dado que este hecho ya se lo demostró en el ejemplo anterior, se concluye que es verdad que, si a^2 es par, entonces a es par.

Método de demostración por reducción al absurdo

Este método de demostración indirecto consiste en negar la tesis del teorema, y a partir de este resultado y, con la ayuda de las reglas de inferencia, llegar a una contradicción de la hipótesis o con un hecho matemático.

Ejemplo

Demostrar que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Demostración:

Supongamos por absurdo que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, entonces $\sqrt{3}$ se puede expresar como racional, es decir, existen enteros $b \neq 0$ y a primos relativos tales $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$.

Si $\sqrt{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 3b^2$, entonces a^2 es un entero par o impar dependiendo de entero b par o impar.

Si b^2 es par, b es par, entonces existe un entero k tal que $b = 2k$, sustituyendo en $a^2 = 3(2k)^2 \Longrightarrow a^2 = 12k^2$, entonces a^2 es par, lo que implica que a es par. Estocontradice el hecho de que a y b son primos relativos.

Por lo tanto, la suposición realiza es falsa y es verdad que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.

Nota: que a y b son primos relativos. Significa que el máximo común divisor es 1.

CAPÍTULO 2 TEORÍA DE CONJUNTOS

2.1. Introducción

La teoría de conjuntos estudia las propiedades de los conjuntos: colecciones abstractas de objetos, consideradas como objetos en sí mismas. Los conjuntos y sus operaciones más elementales son una herramienta básica en la formulación de cualquier teoría matemática.

2.2. Conjuntos

El conjunto es una agrupación de objetos que está bien definido, de tal manera que se pueda afirmar si cualquier objeto pertenece o no a la agrupación.

Al conjunto que contiene todos los elementos de una misma propiedad, se llama universo, y se denota por $\bigcup$. Al conjunto que tiene un solo elemento se le llama unitario. El conjunto que carece de elementos se llama vacío, y lo denotamos por $\{ \}$ o $\varnothing$. Un conjunto se dice finito, si podemos enumerar sus elementos, caso contrario, el conjunto será infinito. Por ejemplo, el conjunto de los estudiantes de una universidad es finito y el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) es infinito.

A los conjuntos los notaremos con las letras mayúsculas A, B, C, D, etc., y a sus elementos con las letras minúsculas a, b, c, d, etc.

Para indicar que un elemento pertenece a un conjunto, usaremos el símbolo "$\in$ " que se lee "pertenece a". Por ejemplo, $b \in B$ significa que el elemento; b pertenece a B . Si b no pertenece a B , lo denotaremos por $b \notin B$.

Un conjunto queda definido únicamente por sus elementos, y este puede aparecer de manera idéntica una sola vez. Si se puede determinar sin ambiguedad, cuáles son los elementos de un conjunto, se dice que el conjunto está bien definido.

2.3. Métodos para determinar conjuntos

Por enumeración o extensión: si se escriben todos y cada uno de los elementos de un conjunto.

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
2. $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
3. $C = \{\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}\}$
4. $D = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 75\}$

Por comprensión: cuando se define por medio de una o más propiedades que caracterizan a los elementos y solo a ellos.

Ejemplos.

1. $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 < x < 7\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
2. $\mathrm{D} = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$
3. $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{R} / (x-3)(x-2) = 0\} = \{2, 3\}$
4. $\mathrm{D} = \{x \in \mathbb{Z} / (x-6)(x+6) = 0\} = \{-6, 6\}$

2.4. Relaciones entre conjuntos

2.4.1. Igualdad entre conjuntos

Dos conjuntos A y B son iguales si y solo si tienen los mismos elementos, es decir:

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x: x \in \mathrm{A} \Leftrightarrow x \in \mathrm{B}).$$

Ejemplos

1. $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - 8 = 0\} = \{2\}$ y $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{N} / x^5 - 32 = 0\} = \{2\}$.
2. $C = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 - 4 = 0\} = \{-2, 2\}$ y $D = \{x \in \mathbb{Z} / x^5 - 32 = 0\} = \{-2, 2\}$.
3. $E = \{x \in \mathbb{Z} / -1 < x < 3\} = \{0, 1, 2\}$ y $F = \{x \in \mathbb{N} / 0 \leq x < 3\} = \{0, 1, 2\}$.

Si A, B y C son conjuntos cualesquiera, entonces la igualdad entre conjuntos cumple las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: $\forall A, A = A$

2. Simétrica: $A = B \Rightarrow B = A$

3. Transitiva: $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

Nota: si la igualdad de conjuntos cumple con las tres propiedades, entonces se dice que la relación es de equivalencia.

2.4.2. Inclusión entre conjuntos

Se dice que B es un subconjunto de A , y lo denotamos por $B \subseteq A$ (se lee: B subconjunto de A) si y solo si, todo elemento de B es de A , es decir:

$$B \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x: x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Si B es subconjunto de A , pero B no es igual a A , se dice que B es subconjunto propio de A , y lo denotamos como $B \subset A$.

Nota: el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, así como todo conjunto es subconjunto de sí mismo $A \subseteq A$.

Ejemplos

Si $A = \{ x \in \mathbb{N} / 2 < x \leq 10, x \text{ } impar \}$ y $B = \{ 5, 7 \}$, entonces $B \subset A$

Si $C = \{ x \in \mathbb{Z} / -3 < x \leq 4 \}$ y $D = \{$ Divisores positivos de 4 $\}$, entonces $D \subset C$

Si $F = \left\{ x \in \mathbb{Q} / x^2 - \frac{25}{16} = 0 \right\}$ y $E = \left\{ -\frac{5}{4} \right\}$ entonces $E \subset F$

Si $G = \{ x \in \mathbb{N} / x^4 - 16 = 0 \}$ y $H = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$, entonces $G \subset H$

Si A, B y C son conjuntos cualesquiera, entonces la relación de inclusión entre conjuntos cumple las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: $\forall A$: $A \subseteq A$

2. Antisimétrica: $\forall A,B$: $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A = B$

3. Transitiva: $\forall A,B,C$: $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

Nota: una relación que cumple con las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva se dice que es una relación de orden.

Para ilustrar las relaciones existentes entre conjuntos, se emplea los diagramas de Venn-Euler, que consiste en representar un conjunto con una región plana, limitada por una curva cerrada, la cual puede tener cualquier forma. Todos los elementos pertenecientes al conjunto se encuentran en el interior de la región cerrada y cualquier objeto fuera de ella no pertenece al conjunto.

Para el caso de la relación de inclusión entre conjuntos, la representación en diagrama de Venn-Euler, se muestra en la figura 2.1.

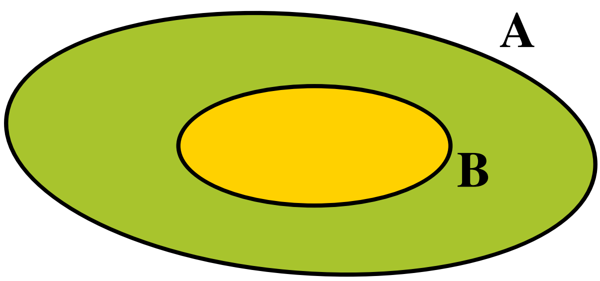


Figura 2.1. Representación en diagrama de Venn, de $B \subset A$

2.5. Operaciones entre conjuntos.

2.5.1. Unión U

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, la unión entre A y B se define como:

$$A \cup B = \{ x \,/\, x \in A \wedge x \in B \}$$

Utilizando diagramas de Venn, $A \cap B$ se representa como la parte sombreada de las figuras 2.2, en los casos que: A y B tienen elementos en común, A y B no- tiene ningún elemento en común y A es subconjunto de B .

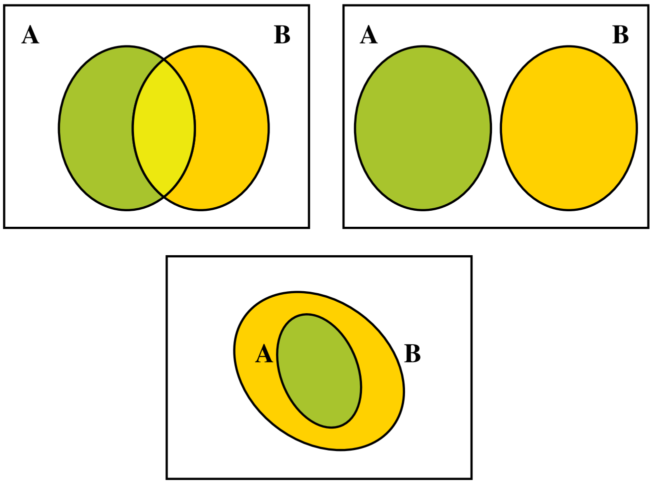


Figura 2.2. Representación en diagrama de Venn de la unión entre A y B, en tres casos diferentes

Ejemplos

Hallar la unión de las siguientes parejas de conjuntos

1. $A=\{ a, b, c, d, e, f, g \}$ y $B=\{ 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10 \}$

$A \cup B=\{ a, b, c, d, e, f, g, 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10 \}$

2. $C=\{ 2, 6, 8, 10, 12, 14, 16 \}$ y $D=\{x \in \mathbb{Z} \,/\, -3 \leq x \leq 3\}$

$C \cup D=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 6, 8, 10, 12, 14, 16 \}$

3. $E=\{ x \in \mathbb{Z} \,/\, -3 < x \leq 4\}$ y $F=\{ \text{Divisores positivos de } 18 \}$

$E \cup F=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 18 \}$

De los ejemplos se deduce que, la unión entre conjuntos consiste en copiar los elementos de ambos conjuntos; en caso de tener elementos comunes, se les copia una sola vez.

2.5.2. Intersección ∩

Sean A y B conjuntos cualesquiera, la intersección entre A y B se define como:

$$A \cap B = \{ x \,/\, x \in A \wedge x \in B \}$$

Utilizando diagramas de Venn, $A \cap B$ se representa como la parte sombreada de las figuras 2.3. En los casos en que A y B tienen elementos en común, A es subconjunto de B , y, A y B no tiene ningún elemento en común.

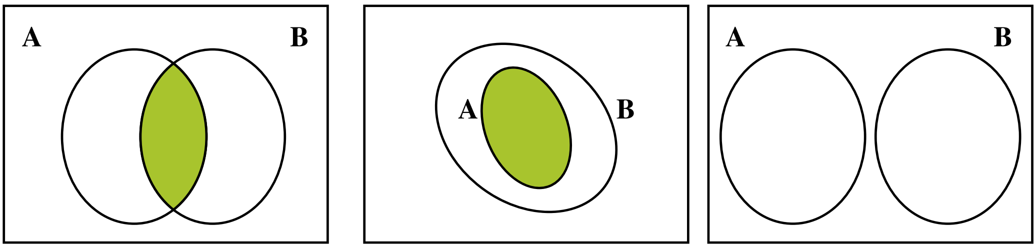


Figura 2.3. Representación en diagrama de Venn de la intersección entre A y B, en tres casos diferentes

Ejemplos.

Halle la intersección en cada una de las parejas de conjuntos.

1. $A = \{ a, b, c, d, e, f, g \}$ y $B = \{ 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10 \}$

$$A \cap B = \varnothing$$

2. $C = \{ 2, 6, 8, 10, 12, 14, 16 \}$ y $D = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -3 \leq x \leq 3\}$

$$C \cap D = \{2\}$$

3. $E = \{ x \in \mathbb{Z} \,/\, -3 < x \leq 4\}$ y $F = \{$ Divisores positivos de 18 $\}$

$$E \cap F = \{ 1, 2, 3 \}$$

Sobre la base de los ejemplos se deduce que la intersección entre conjuntos está formada por los elementos comunes de los dos conjuntos.

Teorema 2.1. Sean A, B y C conjuntos cualesquiera, entonces:

1. $A \subset A \cup B$ o $B \subset A \cup B$
2. $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
3. $A \cap B \subset A$ o $A \cap B \subset B$
4. $A \cup A = A$ o $A \cap A = A$
5. $A \cup B = B \cap A$ o $A \cap B = B \cap A$
6. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ o $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ o $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
8. $A \cup \varnothing = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$ $A \cap U = A$
9. $A \cap (A \cup B) = A$ o $A \cup (A \cap B) = A$

A partir de diagramas de Venn, se puede demostrar cada uno de los literales del teorema.

También se puede dar una demostración matemática más rigurosa. Veamos algunas de ellas.

1. $A \subset A \cup B$

Si $x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B$, y por definición de unión, $x \in A \cup B$.

Por lo tanto, si $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$, luego $A \subset A \cup B$.

2. $A \cap B \subset A$.

Si $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$, como $x \in A$, se cumple que $A \cap B \subset A$.

3. $A \cup B = B \cup A$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow (x \in B \vee x \in A) \Leftrightarrow x \in B \cup A$

Por lo tanto, se cumple que $A \cup B = B \cup A$.

4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow [\, x \in A \;\wedge\; x \in (\, B \cup C\,)\,]$

$\Leftrightarrow [\, x \in A \;\wedge (\, x \in B \vee x \in C\,)\,]$

$\Leftrightarrow [\,(\, x \in A \;\wedge\; x \in B\,) \vee (\, x \in A \;\wedge\; x \in C\,)\,]$

$\Leftrightarrow [\, x \in (\, A \cap B\,) \vee x \in (A \cap C)\,]$

$\Leftrightarrow x \in [\,(A \cap B) \cup (A \cap C)\,]$

Por lo tanto $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2.5.3. Diferencia

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, la diferencia entre A y B se define como:

$$A - B = \{\, x \,/\, x \in A \wedge x \notin B \,\}$$

Gráficamente la diferencia $A - B$ la representamos por la parte sombreada de las figuras 2.4, en los casos que: A y B tienen elementos en común, y, A y B son disjuntos (no tienen ningún elemento en común). La parte sombreada de las figuras 2.5, representan $B - A$.

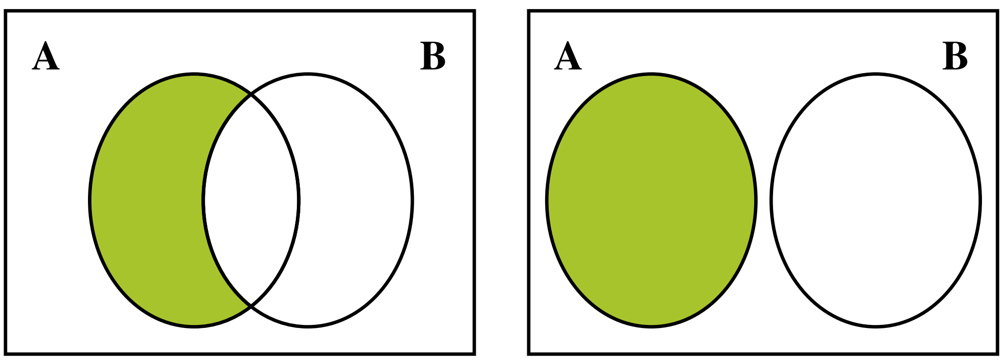
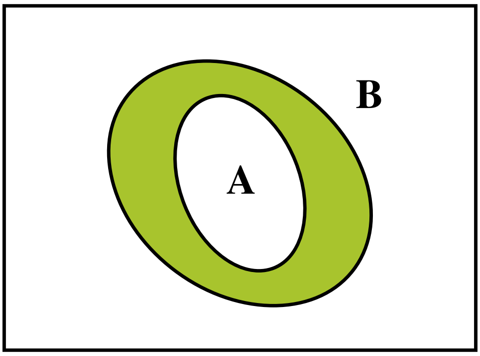


Figura 2.4 Representación en diagrama de Venn de la diferencia entre A y B



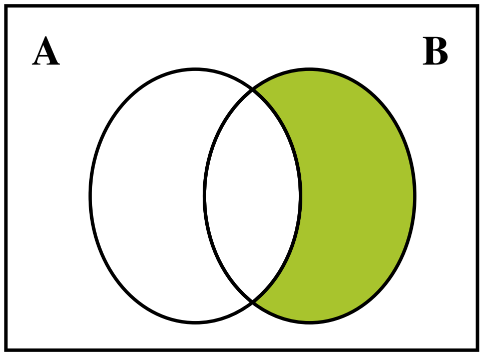


Figura 2.5 Representación en diagrama de Venn de la diferencia entre B y A

Ejemplos

De los siguientes conjuntos, halle la diferencia de un conjunto con respecto al otro y viceversa.

1. $A = \{ a, b, c, d, e, f, g \}$ y $B = \{ 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10 \}$

$A - B = \{ \text{a, b, c, d, e, f, g} \}$ y $B - A = \{ 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10 \}$

2. $C = \{ 2, 6, 8, 10, 12, 14, 16 \}$

$D = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -3 \leq x \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$

$C - D = \{ 6, 8, 10, 12, 14, 16 \}$ y $D - C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 3 \}$

3. $E = \{ x \in \mathbb{Z} \,/\, -3 < x \leq 4 \} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \}$

$F = \{ \text{Divisores positivos de } 18 \} = \{ 1, 2, 3, 6, 9, 18 \}$

$E - F = \{-2, -1, 0, 4 \}$ y $F - E = \{ 6, 9, 18 \}$

Para hallar la diferencia $A - B$, se debe coger los elementos que están en A, pero si están en B, no los cogemos.

2.5.4. Complemento

Sea A un subconjunto del universo U, se define el complemento de A en U y se denota A^C o $\bar{A}$ (se lee A complemento) al conjunto $U - A$.

$$U - A = A^C = \{ x \,/\, x \in U \wedge x \notin A \}$$

La parte sombreada de la figura 2.6 representa el complemento de A . Se puede decir que el complemento de A es lo que le falta al conjunto A para llegar a ser el universo.

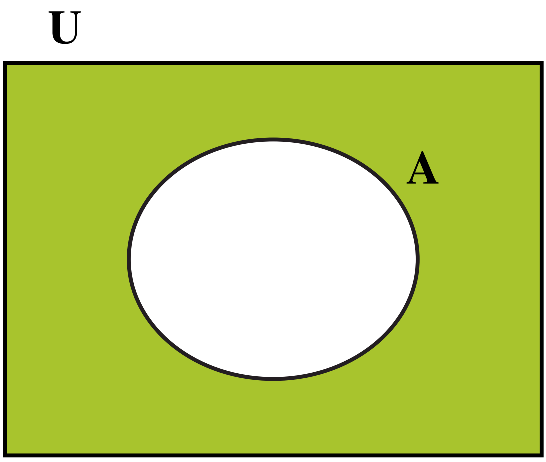


Figura 2.6. Representación en diagrama de Venn del complemento de A

Ejemplos

Dado el conjunto universo y un subconjunto de este, halle su complemento.

1. $U = \{-2, 1, 2, 4, 5, 11, 15, 17\}$ y $A = \{1, 2, 11, 17\}$

$$A^C = \{-2, 4, 5, 15\}$$

2. $U = \{3, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$ y $B = \{12, 15, 18, 27\}$

$$B^C = \{3, 9, 21, 24\}$$

Teorema 2.2. Sean A, B y C conjuntos cualesquiera, entonces

1. $A - B = A \cap B^C$ 2. $(A^C)^C = A$
3. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A - B = A$ 4. $\overline{\varnothing} = U$ y $\bar{U} = \varnothing$

5. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ Ley de Morgan

6. $C \cup C^{\,C} = U$

7. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ Ley de Morgan

7. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

Demostremos matemáticamente algunas de ellas:

1. $A - B = A \cap B^C$

$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^C \Leftrightarrow x \in A \cap B^C$

Entonces, se cumple que $A - B = A \cap B^C$

2. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^C &\Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \\
&\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\
&\Leftrightarrow x \in A^C \wedge x \in B^C \\
&\Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C
\end{aligned}
$$

Entonces, se cumple que $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

3. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cap B)^C &\Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \\
&\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \\
&\Leftrightarrow x \in A^C \vee x \in B^C \\
&\Leftrightarrow x \in (A^C \cup B^C)
\end{aligned}
$$

Entonces, se cumple que $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

4. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \quad (A \cap C)^C \\
&= (A \cap B) \cap (A^C \cup C^C)
\end{aligned}
$$

$$= [(A \cap B) \cap A^C] \cup [(A \cap B) \cap C^C)]$$
$$= [(A \cap A^C) \cap B] \cup [(A \cap (B \cap C^C)]$$
$$= [\varnothing \cap B] \cup [(A \cap (B - C)]$$
$$= \varnothing \cup [(A \cap (B - C)]$$
$$= A \cap (B - C)$$

2.5.5. Diferencia simétrica

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, se llama diferencia simétrica entre A y B, y lo denotamos por $A \Delta B$, a la unión de los conjuntos $(A - B)$ y $(B - A)$.

Es decir: $A \Delta B = \{ x / x \in (A - B) \cup (B - A)\}$.

La parte sombreada de figura 2.7, representa la diferencia simétrica entre A y B.

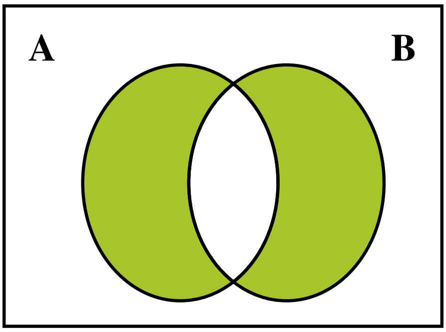


Figura 2.7. Representación en diagrama de Venn de la diferencia simétrica

Ejemplos.

Dados los siguientes conjuntos, hallar la diferencia simétrica de los mismos

1. $A = \{-3, 0, 1, 2, 3, 6\}$ y $B = \{-2, 1, 2, 4, 5, 11\}$

$$A \Delta B = \{-2, -3, 0, 3, 4, 5, 6, 11\}$$

2. $C = \{1, 3, 7, 11, 13, 15\}$ y $D = \{0, 1, 7, 9, 13, 11, 17\}$

$$C \Delta D = \{0, 3, 9, 15, 17\}$$

3. $E = \{7, 14, 21, 29\}$ y $F = \{8, 16, 24, 32, 40\}$

$$E \Delta F = \{7, 14, 21, 29, 8, 16, 24, 32, 40\}$$

Teorema 2.3. Sean A, B y C conjuntos cualesquiera, entonces

1. $A \,\Delta\, A = \varnothing$
2. $A \subset B \Rightarrow A \,\Delta\, B = B - A$
3. $(A \,\Delta\, B)\, \Delta^{C} = A \quad (B \,\Delta\, C)$
4. $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$
5. $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \;\Delta\; (A \cap C)$
6. $A^{C} \Delta\, B = A \,\Delta\, B$

Demostraciones:

1. $A \,\Delta\, A = \varnothing$

$$A \Delta\, A = (A - A) \quad (A - A) = \varnothing \quad \varnothing = \varnothing$$

2. $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B)\, \Delta\, (A \cap C)$

$$\begin{aligned} A \cap (B \,\Delta\, C) &= A \cap [(B - C) \cup (C - B)] \\ &= [A \cap (B - C)] \cup [A \cap (C - B)] \\ &= [(A \cap B) - (A \cap C)] \cup [(A \cap C) - (A \cap B)] \\ &= (A \cap B)\, \Delta\, (A \cap C) \end{aligned}$$

3. $A^{C} \Delta\, B^{C} = A \,\Delta\, B.$

$$\begin{aligned} A^{C} \Delta\, B^{C} &= (A^{C} - B^{C}) \cup (B^{C} - A^{C}) \\ &= \left(A^{C} \cap (B^{C})^{C}\right) \cup \left(B^{C} \cap (A^{C})^{C}\right) \\ &= (A^{C} \cap B) \cup (B^{C} \cap A) \\ &= (B \cap A^{C}) \cup (A \cap B^{C}) \\ &= (B - A) \cup (A - B) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= A \,\Delta\, B \end{aligned}$$

Ejercicios resueltos

1. Representar en diagramas de Venn las siguientes operaciones entre conjuntos.

a) $A \cap B \cap C$

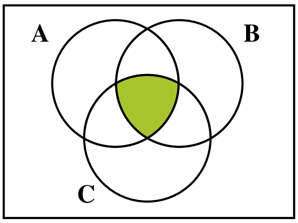


Figura 2.8. Representación en diagrama de Venn de la operación del literal a)

b) $[A-(B \cup C)] \cup [B \cap (A \cup C)^{c}]$

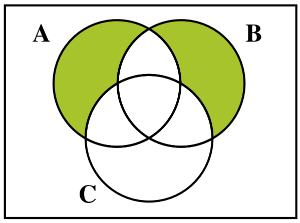


Figura 2.9. Representación en diagrama de Venn de la operación del literal b)

c) $[(A \cap B)-C] \cup [(A \cap C) \cap B^{C}] \cup [(C \cap B)-A]$

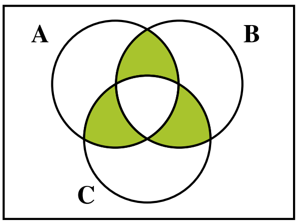


Figura 2.10. Representación en diagrama de Venn de la operación del literal c)

d) $[(A \cap B)-C] \cup [C-(A \cap B)]$

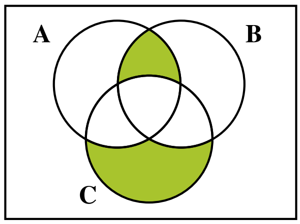


Figura 2.11. Representación en diagrama de Venn de la operación del literal d)

e) $[(A \cap B)-(C \cup D)] \cup [(A \cap C)-(B \cup D)] \cup [(D \cap B\ (C \cup A)] \cup [(C \cap D)-(A \cup B)]$

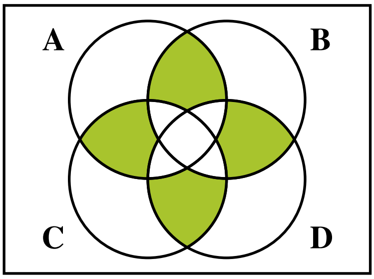


Figura 2.12. Representación en diagrama de Venn de la operación del literal e)

2. Dados los siguientes conjuntos, hallar las operaciones indicadas.

$A=\{-3, 0, 1, 2, 3, 5, 6\}$, $B=\{-2, 1, 2, 4, 5, 11\}$, $C=\{1, 2, 3, 7, 11, 13, 15\}$

y $U=\{-3,-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13, 15, 18, 19, 20, 25, 28\}$

a) $A\cap B\cap C=\{1, 2\}$

b) $A^C\cap B^C\cap C^C=(A\cup B\cup C)^C=\{18, 19, 20, 25, 28\}$

c) $[(A\cap B)-C]\cup[C-(A\cup B)]=\{5, 7, 13, 15\}$

d) $[(A\cap B)-C]\cup[(A\cap C)\cap B^C]\cup[(C\cap B)-A]=\{5, 3, 11\}$

e) $[A-(B\cup C)]\cup[B\cap(A\cup C^{C)}=\{-2, -3, 0, 4\}$

3. Dado $E-(F\cup D)=\{0, 2\}$, $E\cap F=\{3, 5\}$, $F\cap D=\{-5, 5\}$,

$D\cap(E^C\cap F^C)=\{7, 4\}$, $(E^C\cap F^C\cap D^C)=\{-2, 6\}$, $D\cap E\cap F^C=\{1\}$ y

$U=\{-5, -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

determine el número de elementos de los conjuntos (cardinalidad) y los componentes de E, F, D.

Al ubicar los datos en diagrama de Venn de la figura 2.13, los elementos de las tres primeras condiciones y tomando en cuenta las equivalencias de las demás, se tiene que:

$D\cap(E^C\cap F^C)=D\cap(E\cup F)^C=\{7, 4\}$; $E^C\cap F^C\cap D^C=(E\cup F\cup D)^C=\{-2, 6\}$; $D\cap E\cap F^C=(D\cap E)-F=\{1\}$ y $U=\{-5, -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

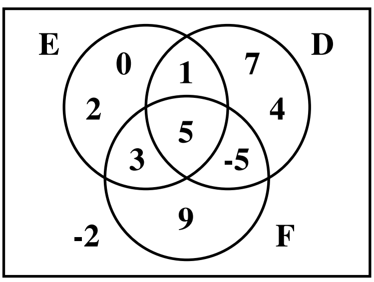


Figura 2.13. Representación en diagrama de Venn, de las condiciones del ejercicio

3. Entonces los componentes de los conjuntos son:

$E = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $D = \{-5, 1, 4, 5, 7\}$ y $F = \{-5, 3, 5, 9\}$

La cardinalidad de los conjuntos es: $n(E) = 5$, $n(D) = 5$ y $n(F) = 4$

4. En un curso compuesto por 60 estudiantes de diferentes colegios; 20 resuelven ejercicios de razonamiento lógico, 25 de razonamiento abstracto, 30 de razonamiento verbal; cinco resuelven preguntas de razonamiento lógico y abstracto; siete desarrollan preguntas de razonamiento lógico y verbal; dos estudiantes resuelven preguntas de los tres tipos y cinco estudiantes no realizan ninguna de las actividades.

a) ¿Cuántos estudiantes desarrollan preguntas solo de razonamiento lógico?

b) ¿Cuántos estudiantes desarrollan preguntas solo de razonamiento lógico y abstracto?

c) ¿Cuántos estudiantes desarrollan preguntas solo de razonamiento abstracto y verbal?

Para resolver el problema, construyamos un diagrama de Venn (ver figura 2.14), en el que aparecen los tres conjuntos **RL**: razonamiento lógico, **RA**: razonamiento abstracto y **RV**: razonamiento verbal, y sobre la base de las condiciones del problema colocamos en cada una de las regiones los valores respectivos. En aquellas cuyos valores no se pueden determinar directamente ubicamos letras, y a partir de resolución de sistemas de ecuaciones hallamos sus valores.

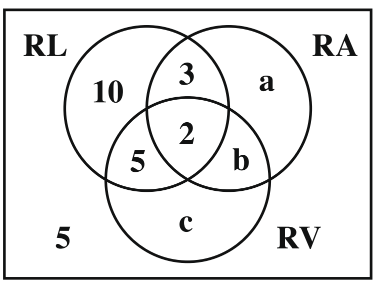


Figura 2.14. Representación en diagrama de Venn, de las condiciones del ejercicio 4

1) $10 + 3 + a + 5 + 2 + b + c + 5 = 60 \Rightarrow a + b + c = 60 - 25 \Rightarrow a + b + c = 35$

2) $3 + 2 + a + b = 25 \Rightarrow a + b = 20$

3) $5 + 2 + b + c = 30 \Rightarrow b + c = 23$

De 2) y 3) se obtiene: 4) $a + b + c + b = 43$

Reemplazando 1) en 4) se obtiene: $35 + b = 43 \Rightarrow b = 8$

De 2) $a + 8 = 20 \Rightarrow a = 12$ y de 3) $8 + c = 23 \Rightarrow c = 15$

Contestando las preguntas:

a) 10   b) 3   c) 8   d) $12 + 15 = 27$

5. Un grupo de 32 deportistas visitan un local que ofrece tres variedades de jugos:

V1: plátano y papaya, **V2**: zanahoria y remolacha y **V3**: guayaba y mora.

Seis deportistas toman jugos solo de la variedad uno y dos o dos y tres o uno y tres, tres deportistas toman de uno y dos, cinco toman de la variedad dos y tres, y un deportista de la variedad uno y tres.

Los que toman solo de la variedad tres, exceden en tres a los que toman solo de la variedad dos, y son la mitad de los que toman solo la variedad uno.

Todos los deportistas consumen al menos de una variedad de jugo.

a) ¿Cuántos deportistas consumen jugos de la primera variedad?

b) ¿Cuántos deportistas consumen jugos de la segunda o tercera variedad?

c) ¿Cuántos deportistas consumen las tres variedades de jugos?

d) ¿Cuántos deportistas consumen jugos solo de una variedad?

Construyamos un diagrama de Venn (ver figura 2.15) en el que aparecen los tres conjuntos que representan las variedades:

V1: plátano y papaya, **V2**: zanahoria y remolacha y **V3**: guayaba y mora.

En cada una de las regiones ubicamos letras, y a partir de resolución de sistemas de ecuaciones hallamos sus valores.

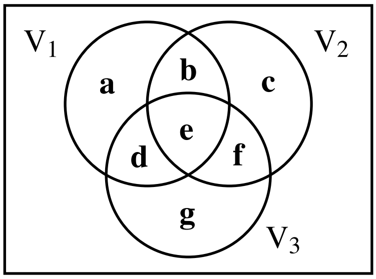


Figura 2.15. Representación en diagrama de Venn, de las condiciones del ejercicio 5

1) $a + b + c + d + e + f + g = 32$

2) $b + f + d = 6$

3) $b + e = 3$

4) $e + f = 5$

5) $d + e = 1$

6) $$g = c + 3 = \frac{1}{2}a \Rightarrow \begin{cases} g = \frac{1}{2}a \\ c + 3 = \frac{1}{2}a \Rightarrow \qquad c = \frac{1}{2}a - 3 \end{cases}$$

De la suma de las ecuaciones 3), 4) y 5) se obtiene 7) $b + d + f + 3e = 9$, al sustituir 2) en 7) nos queda $6+3e = 9 \Rightarrow e = 1$, al reemplazar el valor de e en las ecuaciones 3), 4) y 5) tenemos $b = 2$, $f = 4$ y $d = 0$.

De 1) $\mathrm{a} + 2 + \frac{1}{2}\mathrm{a} - 3 + 0 + 1 + 4 + \frac{1}{2}\mathrm{a} = 32 \Rightarrow 2\mathrm{a} = 28 \Rightarrow \mathrm{a} = 14$

Y de $\quad g = \frac{1}{2}(14) = 7 \qquad \mathrm{c} = \frac{1}{2}(14) - 3 = 4$

Contestemos las preguntas.

a) 14 + 2 +1+ 0 =17 b) 4+ 2+1+ 4+0+7 =18

c) 1 d) 14+ 4+7 = 25

6. En una encuesta realizada a 64 personas sobre la preferencia de sabores de helados, se obtiene la siguiente información:

Todos los que prefieren helados de vainilla también gustan del de chocolate. El número de hombres a quienes les gustan solo helados de chocolate es la mitad de mujeres que les gusta la misma variedad. Hay tres mujeres a quienes les gusta helados de chocolate y vainilla. En el grupo, hay 36 hombres. El número de hombres que prefieren helado de chocolate y vainilla más los que no prefieren ninguna de las variedades es igual a 27. Hay cinco hombres que no prefieren ninguna variedad de helados.

a) ¿Cuántas mujeres prefieren solo helados de chocolate?

b) ¿Cuántas personas no prefieren ninguna de las variedades?

c) ¿Cuántas personas prefieren las dos variedades?

Solución

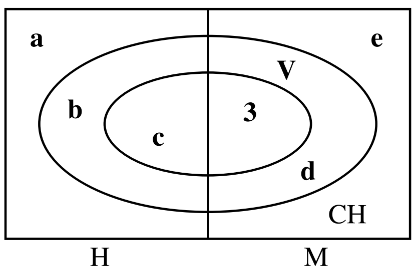


Figura 2.16. Representación en diagrama de Venn, de las condiciones del ejercicio 6

1) $a + b + c + 3 + d + e = 64 \Rightarrow a + b + c + d + e = 61$

2) $b = \frac{1}{2}d$

3) $a + b + c = 36$

4) $3 + d + e = 28 \Rightarrow d + e = 25$

5) $c + a = 27 \Rightarrow c = 27 - a$

6) $a = 5$

Reemplazamos 5) en 3) $a + b + 27 - a = 36 \Rightarrow b = 9$

De 2) $d = 2b \Rightarrow d = 2(9) = 18$

De 4) $18 + e = 25 \Rightarrow e = 7$ y de 5) $c = 27 - 5 = 22$

Contestemos las preguntas.

a) 18 b) $a + 7 = 5 + 7 + 12$ c) $c + 3 = 22 + 3 = 25$

EJERCICIOS PROPUESTOS 2.1

1. Determine por extensión o comprensión los siguientes conjuntos.

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -3 < x < 3\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 2 = 0\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 10x + 25 = 0\}$ d) $E = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x < -7 \vee x > 7\}$

e) $D = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0\}$ f) $G = \{1, 3, 9, 27, 81, \ldots\}$

g) $F = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

2. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -4 \leq x \leq 4\}$, $B = \{-3, 0, 1, 4, 5, 6, 9, 10\}$
$C = \{-4, -3, -2, 0, 4, 8, 10, 11, 12\}$, $D = \{-2, 0, 1, 4, 7, 8, 13\}$ y
$U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17\}$.

Hallar:

a) $(A \,\Delta\, B) \cup (C \,\Delta\, D)$ b) $A \cap B \cap C \cap D$

c) $A - B - (C - D)$ d) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$

e) $(A^C - B^C)^C \cup (C^C \cap D^C)$ f) $(A \cup B) \cap C^C \cap D^C$

g) $A^C \cap B^C \cap C^C \cap D^C$ h) $(A \cup B \cup D)^C$

i) $(A^C \cup B^C) \cap (C \,\Delta\, D)$ j) $\{[D \cap (B \cup C)] \cup (B \cup C)\}^C \cap (A - B - C)^C$

3. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ 2 \leq x \leq 12\}$, $B = \{-2, -1, 0, 2, 4, 8\}$

$C = \{-4, -3, -2, 2, 6, 8, 10\}$ $\qquad$ $D = \{-2, 0, 1, 4, 7, 8, 12\}$

$U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

Hallar:

a) $(A-B) \cup (C \Delta D)$ $\qquad$ b) $A \cap B^C \cap C \cap D$

c) $A-B \cap (C-D)^C$ $\qquad$ d) $(A \cup B)\ \Delta\ (C \cup D)$

e) $(A^C - B^C)^C \cup (C^C \cap D^C)$ $\qquad$ f) $(A \cup B) \cap C - D^C$

4. Representar en diagramas de Venn las siguientes operaciones.

a) $[A-(B \cup C)] \cup [B-(A \cup C)]$

b) $[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap (A \cap B \cap C)^C$

c) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$

d) $(A^C - B^C)^C \cup (C^C \cap D^C)$

e) $(A \cup B)^C \cap C^C \cap D^C$

f) $A^C \cap B^C \cap C^C \cap D^C$

g) $A \cap [(B^C \cap C)^C \cup (B \cap C)]$

h) $(A^C \cup B^C) \cap (C\ \Delta\ D)$

i) $\{[D \cap (B \cup C)] \cup (B \cup C)\}^C \cap (A - B - C)^C$

5. Identifique las operaciones representadas en los diagramas de Venn de las figuras 2.17, 2.18, 2.19 y 2.20 literales a), b) y c).

a) $\qquad$ b) $\qquad$ c)

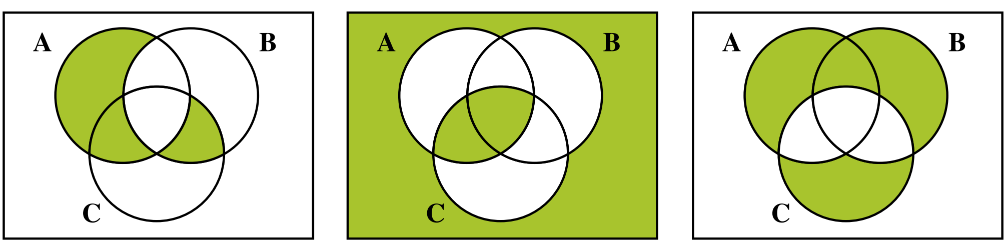


Figura 2.17. Representación en diagrama de Venn, de operaciones entre conjuntos, literales a), b) y c)

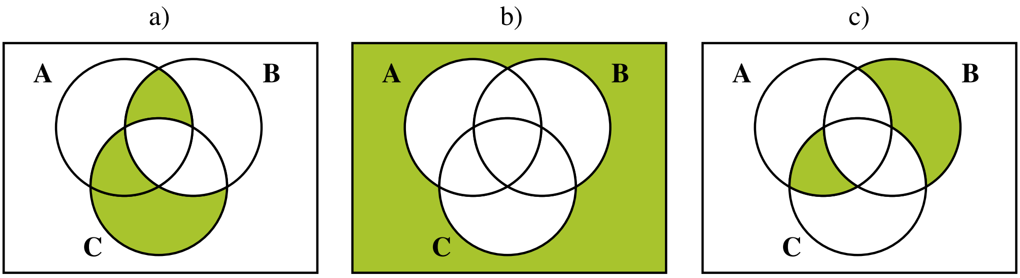


Figura 2.18. Representación en diagrama de Venn, de operaciones entre conjuntos, literales a), b) y c)

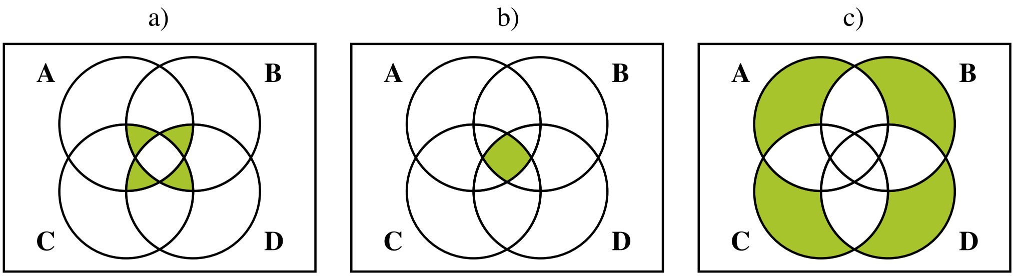


Figura 2.19. Representación en diagrama de Venn, de operaciones entre conjuntos, literales a), b) y c)

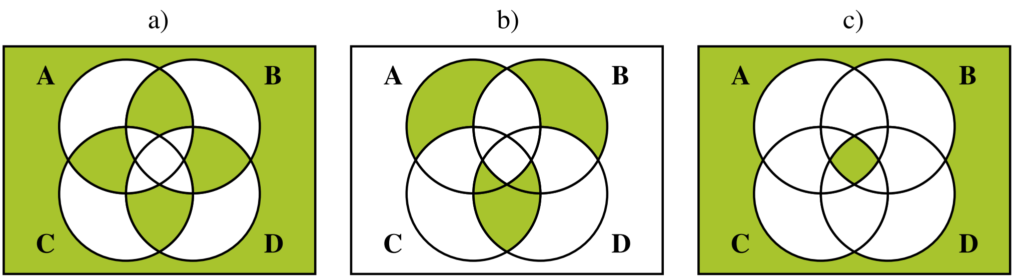


Figura 2.20. Representación en diagrama de Venn, de operaciones entre conjuntos, literales a), b) y c)

6. Simplificar las operaciones dadas entre conjuntos

a) $[(A \cup B)^C - A^C] \cup (B - C^C)$

b) $[(A - B) \cup (A \cap C^C)] \cup (B \cap C)$

c) $[(A \Delta B) \cap (A - B)]^C \cup B^C$

d) $(C \cup A)^C]^C \cup (B^C \cap A)^C\} \cap C^C$

e) $[(B^C - C^C - A^C)^C \cap (B - A \cap C)] \cup C$

7. Sean $E \cap F = \{c, b, 4, 5\}$, $F \cap D = \{b, g, 5\}$, $E \cap (D^C \cap F^C) = \{a, 2\}$, $(E^C \cap F^C \cap D^C) = \{i, h, 8, 9, 10\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ $(E \cup F)^C \cap D = \{f, 3\}$ y $D \cap E \cap (E^C \cup F^C \cup D^C) = \{e\}$ .a

Halle la cardinalidad y los elementos de E, F y D.

8. Sean $E - (F \cup D) = \{1, -2\}$, $E \cap F = \{2, 3, 5, 7\}$, $F \cap D = \{5, 7, 8\}$, $D \cap (E^C \cap F^C) = \{9, 10\}$ $(E^C \cap F^C \cap D^C) = \{0, -3, -4\}$ $D \cap E \cap F^C = \{4\}$ $U = \{-4, -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Halle los elementos de E, F y D.

9. Sean $X^C \cap Y = \{8, 9, 10, 16\}$, $X \cap Y \cap Z = \{4, 5\}$, $(Y - Z) \cap X^C = \{10, 16\}$, $X \cap Y = \{2, 3, 10, 16\}$, $(X \cup Y) \cap (Y \cup Z)^C = \{1, 15\}$, $X \cap (Y \cup Z) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $X \cup Y \cup Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 19\}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$

Halle la cardinalidad y los elementos de X, Y y Z.

10. Sean $A \cap B = \{\alpha, \beta\}$, $C^C \cap B^C = \{\gamma, \eta, \delta, t\}$, $B \Delta B^C = \{\gamma, \Psi, \theta, \pi\}$, $(A \cup B) \cap C = \{\Psi, \alpha, \pi\}$, $C \cap A^C = \{\pi, \rho, \mu\}$. Halle la cardinalidad y los elementos de A, B, C y U.

11. Sean $(A \cap B) \cup C = \{a,b,c,f,g,h,i,l,p\}$, $(A \cup B) \Delta C = \{a,b,d,e,i,l,n,o\}$, $A^C \cap (B \cup C)^C = \{j,k,m\}$, $B^C \cap (A-C) = \{d,o\}$, $(B \cap C) - A = \{h\}$, $A \cap C = \{c,f,g,p\}$. Halle la cardinalidad y los elementos de *A*, *B*, *C* y *U*.

12. Sean $A \cap C = \varnothing$, $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{2,11,3,17\}$, $U \cap (C \cap D) = \{17,23\}$, $(A \cup B \cup C) \cap D = \{11,13,17,19,23\}$, $(A \cup C)^C \cap D^C = \{5,37,41,43,47,53\}$, $A - (B \cap D) = \{1,2\}$, $C \Delta D = \{3,7,11,13,19,31\}$, $(A \cap D) = \{11,19\}$, $D \cap A^C \cap B^C \cap C^C = \{31\}$, $(B \cup C) \Delta D = \{2,3,5,7,19,31,43\}$, $B - D = \{2,3,5,43\}$. Halle la cardinalidad y los elementos de *A*, *B*, *C*, *D* y *U*.

13. En un semestre de 55 estudiantes, 26 estudiantes aprobaron álgebra, 22 aprobaron Matemáticas I y 28 aprobaron Física; 11 estudiantes aprobaron Física y álgebra, nueve Matemática I y Física, ocho aprobaron Matemática I y álgebra, cinco aprobaron las tres materias.

Determine:

a) Cuántos aprobaron solo Matemática I.

b) Cuántos aprobaron solo álgebra o Física.

c) Cuántos no aprobaron ninguna de las tres materias.

d) Cuántos no aprobaron ni Matemática ni Física.

14. En un curso compuesto por 100 estudiantes de diferentes colegios; 55 resuelven ejercicios de razonamiento lógico, 54 de razonamiento abstracto, 61 de razonamiento verbal; 28 resuelven preguntas de razonamiento lógico y abstracto; 30 desarrollan preguntas de razonamiento lógico y verbal; 18 estudiantes resuelven preguntas de los tres tipos. Todos contestan al menos una pregunta

a) ¿Cuántos estudiantes desarrollan preguntas solo de razonamiento lógico?

b) ¿Cuántos estudiantes desarrollan preguntas solo de razonamiento lógico y abstracto?

c) ¿Cuántos estudiantes desarrollan preguntas de sólo de razonamiento abstracto y verbal?

15. Un grupo de 53 deportistas visita un local que ofrece tres variedades de jugos:

V1: plátano y papaya, V2: zanahoria y remolacha y V3: guayaba y mora. Quince deportistas toman jugos solo de la variedad uno y dos o dos y tres o uno y tres, 18 deportistas toman de uno y dos, 15 toman de la variedad dos y tres, y 12 deportistas de la variedad uno y tres. Los que toman solo de la variedad dos, exceden en cinco a los que toman solo de la variedad tres, y exceden en dos a los que toman solo la variedad uno. Hay ocho que no toman jugos.

a) ¿Cuántos deportistas consumen jugos de la primera variedad?

b) ¿Cuántos deportistas consumen jugos de la segunda o tercera variedad?

c) ¿Cuántos deportistas consumen las tres variedades de jugos?

d) ¿Cuántos deportistas consumen jugos solo de una variedad?

16. En una encuesta realizada a 116 personas sobre la preferencia de sabores de helados, se obtiene la siguiente información:

Todos los que prefieren helados de chocolate también gustan del de vainilla. El número de hombres a quienes les gustan solo helados de vainilla exceden en seis a las mujeres a las que les gusta solo de la misma variedad; hay 16 mujeres que les gusta helados de chocolate y vainilla. En el grupo, hay 44 hombres. El número de hombres que prefieren helado de chocolate y vainilla más los que no prefieren ninguna de las variedades es igual a 14.

a) ¿Cuántas mujeres prefieren solo helados de vainilla?

b) ¿Cuántas personas no prefieren ninguna de las variedades?

c) ¿Cuántas personas prefieren las dos variedades?

CAPÍTULO 3 TEORÍA DE NÚMEROS

3.1. Introducción

El estudio de teoría de números lo empezamos con uno de los primeros conjuntos, el de los números naturales, cuyo símbolo es ,y sus elementos son:

$=\{ 2, 3, 4, 5,...\}$, los tres puntos suspensivos indica que el conjunto tiene infinitos números

El conjunto de los números enteros, cuyo símbolo es , y sus elementos son:

$=\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,...\}$.

El conjunto de los números racionales, cuyo símbolo es , y se le define como:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}/a,\ b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0\right\}$$

Los números que no se pueden representar como un racional, se denominan irracionales, su símbolo I , y algunos elementos son: $\mathrm{I}=\left\{\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, ...\right\}$, donde π se lee "pi" y su valor truncado con ocho decimales es 3,14159265…Y e el número de Euler, cuyo valor truncado con ocho decimales es 2,71828182…

El conjunto de los números reales, cuyo símbolo es , está formado por todos los números racionales e irracionales, es decir: $= \cup \mathrm{I}$.

falta un simbolo que no aparece en el archivo original

Finalmente, el conjunto que contiene a todos los antes mencionados, el de los complejos, cuyo símbolo es , y se lo define como: $=\{x+yi\ /a,b\ \epsilon\}$,a_x se le denomina parte real, y parte imaginaria y $i=\{\sqrt{-1}\}$.

3.2. NÚMEROS REALES

En el conjunto de los números reales definimos la adición (+) y el producto (.) como dos operaciones internas tales que, para cualesquier x e y elemento de los reales se tiene que la suma $x + y$ y el producto $x.y$ es otro elemento de los reales.

En el conjunto de los números reales, la operación de adición cumple los siguientes axiomas:

A1. Cerradura $\forall\ x, y \in \mathbb{R} : x + y \in \mathbb{R}$

A2. Conmutativa $\forall\ x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$

A3. Asociativa $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$

A4. Existencia del elemento neutro $\exists\ 0 \in \mathbb{R}\ \forall\ x \in \mathbb{R}\ /\ x+0 = 0+ x = x$

A5. Existencia del inverso aditivo $\forall\ x, \in \mathbb{R}\ \exists\ -x \in \mathbb{R}/x+(-x)=(-x)+x=0$

Y el producto (.) cumple con los axiomas de:

A6. Cerradura $\forall\ x, y \in \mathbb{R} : x.y \in \mathbb{R}$

A7. Conmutativa $\forall\, x, y \in \mathbb{R} = x.\, y = y.x$

A8. Asociativa $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} : (x.y).z = x.(y.z)$

A9. Existencia del elemento neutro $\exists\ 1 \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R} \,/\, x.1=1.x = x$

A10. Existencia del inverso multiplicativo $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0\ \exists\ x^{-1} \in \mathbb{R} \,/\, x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$

Por último, tenemos un axioma que relaciona la adición y el producto, conocido como ley distributiva:

A11. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} : x.(y + z) = x.y + x.z$ distributiva a la izquierda

$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y).z = x.z + y.z$ distributiva a la derecha

Nota: la operación de diferencia entre x e y se define como $x - y = x + (-y)$, donde $-y$ es el simétrico aditivo de y. Y la operación división entre x e y se define como $\frac{x}{y} = x.y^{-1}$ donde y^{-1} es el inverso multiplicativo de y.

A la pareja ($\mathbb{R}$,+) se le llama estructura algebraica, y si (+) cumple con los cinco primeros axiomas, se dice que la estructura algebraica es un grupo abeliano. Si no cumple con la propiedad conmutativa, se llama grupo.

A ($\mathbb{R}$,.) se le llama grupo abeliano si cumplen con los axiomas de A6 a A10. Si no cumple con A7, se llama grupo.

El conjunto de los reales junto con la adición y producto, denotado por ($\mathbb{R}$,+,.), tiene una estructura de cuerpo si cumple con los 11 axiomas.

A partir de los axiomas antes mencionados, se puede demostrar algunas propiedades de la igualdad, enunciadas en el siguiente teorema.

Teorema 3.1. Sean x, y , z y w números reales cualesquiera, tales que:

1. Si $x + z = y + z$, entonces $x = y$ ley cancelativa
2. Si $x.z = y.z$, $z \neq 0$, entonces $x = y$ ley cancelativa

3. Si $x.y = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$

4. $x.0 = 0$

5. $-(-x) = x$

6. $\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \Rightarrow xw = yz, \quad y \neq 0, \quad w \neq 0$

Demostraciones:

1. Para la demostración utilizaremos el método directo.

Partimos de: $x + z = y + z$

$x + z + (-z) = y + z + (-z)$	suma de $(-z)$ a ambos miembros
$x + [z + (-z)] = y + [z + (-z)]$	por **A3**
$x + 0 = y + 0$	por **A5**
$x = y$	por **A4**

2. Al igual que en 1, utilizaremos el método directo.

Partimos de: x.z = y.z

$x.z.z{-}1 = y.z.z{-}1$	multiplicamos por $z{-}1$ a ambos miembros
$x.(z.z{-}1) = y.(z.z{-}1)$	por **A8**
$x.1 = y.1$	por **A10**
$x = y$	por **A9**

3. $-(-x) = x$

Sabemos por **A5** que: $-(-x) + (-x) = 0$ y $x + (-x) = 0$, igualándolos tenemos que: $-(-x) + (-x) = x + (-x)$, y por ley cancelativa concluimos que: $-(-x) = x$.

La demostración de los demás literales queda como ejercicio para el lector.

3.3. Expresiones algebraicas

A una letra que puede tomar cualquier número dentro de un conjunto de definición se le llama variable. Las variables *a, b, x, y, z*, etc. Asociadas con números reales, y combinadas con las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación, se llama expresión algebraica. Por ejemplo:

$$2x^4\ ,\ 5y^2-3,\ 2z^2-3z+5\ ,\ 4w^3-3w^2+2w-2$$

Una expresión algebraica en la que aparecen números y variables asociadas únicamente con las operaciones de producto y potenciación se llama monomio. Por ejemplo, $2x^4$,$7x^4y^3$, $\frac{2}{3}xyz^5$. A 2,4 y $\frac{2}{3}$ se le llama coeficientes numéricos y, a las variables asociadas, parte literal. El grado de un monomio se determina con la suma de los exponentes de la parte literal, por ejemplo $\frac{2}{3}xyz^5$ es de grado 7.

A la suma de dos monomios, se le llama binomio y un trinomio es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama polinomio. El grado de un polinomio esta dado por el grado del monomio de mayor grado.

Un polinomio en la variable *x*, denotado por $p(x)$, es una expresión de la forma:

$$p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$$

donde a_0, a_1, a_2 ,..., a_n son números reales, y n un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, el polinomio es de grado n . A los monomios del polinomio se le llaman términos.

3.3.1. Suma de polinomios

La suma de polinomios es otro polinomio que tiene como resultante las sumas de los términos semejantes (monomios del mismo grado y parte literal). La dieferencia de polinomios es una particular suma, es decir $p(x)-q(x)=p(x)+[-q(x)\}]$

Ejemplos.

1. $p(y)=\frac{y^3}{2}-\frac{2y^2}{3}+\frac{3y}{4}-3$ y $q(y)=2y^4+4y^3+\frac{4}{5}y^2-\frac{5}{6}y-1$, la suma $p(y)+q(y)$

$$p(y)+q(y)=\left(\frac{y^3}{2}-\frac{2y^2}{3}+\frac{3y}{4}-3\right)+\left(2y^4+4y^3+\frac{4}{5}y^2-\frac{5}{6}y-1\right)$$

$$=2y^4+\frac{y^3}{2}+4y^3-\frac{2y^2}{3}+\frac{4}{5}y^2+\frac{3y}{4}-\frac{5}{6}y-3-1$$

$$=2y^4+\frac{9y^3}{2}+\frac{2}{15}y^2-\frac{y}{12}-4$$

2. Si $p(x)=x^5-3x^4+5x^2-9$ y $q(x)=-8x^5+9x^4-7x^3-2x^2+x-15$, la diferencia de $p(x)-q(x)$ es: $p(x)-q(x)=(x^5-3x^4+5x^2-9)-(-8x^5+9x^4-7x^3-2x^2+x-15)$

$$=x^5-3x^4+5x^2-9+8x^5-9x^4+7x^3+2x^2-x+15$$

$$=9x^5-12x^4+7x^3+7x^2-x+6$$

3.3.2. Producto de polinomios

El producto de polinomios es otro polinomio. Para calcular el producto de polinomios, se utiliza entre otras propiedades de los números reales, la propiedad distributiva.

Ejemplos

1. $(2x^2+3)(-5x+3)=(2x^2+3)(-5x)+(2x^2+3)(3)$

$$=(2x^2)(-5x)+(3)(-5x)+(2x^2)(3)+(3)(3)$$

$$=-10x^3-15x+6x^2+9$$

$$=-10x^3+6x^2-15x+9$$

$$
\begin{aligned}
2.\ (ax^2+bx+c)(ax^2-bx-c) &= (ax+bx+c)(ax^2)+(ax+bx+c)(-bx)+(ax+bx+c)(-c)\\
&= a^2x^4+abx^3+acx^2-abx^3-b2x^2-bcx-acx^2-bcx-c^2\\
&= a^2x^4-b^2x^2-2bcx-c^2
\end{aligned}
$$

3.3.3. División de polinomios

Al dividir el polinomio $p(x)$ (dividendo) para $q(x)$ (divisor), buscamos un polinomio $c(x)$ (cociente) y un resto $r(x)$, tal que $p(x) = q(x)c(x) + r(x)$.

Si $r(x) = 0$, la división es exacta, y se dice que $p(x)$ es divisible para $q(x)$. Para dividir, los polinomios se ordenan, respecto a las potencias, en forma descendente de la incógnita, tanto el dividendo como el divisor.

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 13$ entre $q(x) = x + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
+x^5+2x^4-3x^3+4x^2-5x-13 & \underline{x+1} \\
\underline{-x^5\ \ -x^4} & x^4+x^3-4x^2+8x-13 \\
0\ +x^4-3x^3 & \\
\quad \underline{-x^4\ -x^3} & \\
\quad 0\ -4x^3+4x^2 & \\
\qquad \underline{+4x^3+4x^2} & \\
\qquad 0\ +8x^2-5x & \\
\qquad\quad \underline{-8x^2-8x} & \\
\qquad\quad 0\ \ -13x-13 & \\
\qquad\qquad \underline{+13x+13} & \\
\qquad\qquad\quad 0\ +\ 0 &
\end{array}
$$

Si $r(x) \neq 0$, la división es inexacta, y se dice que $p(x)$ no es divisible para $q(x)$.

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^7 + 2x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 7x - 48$ entre $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

$$\begin{array}{l|l}
+x^7+2x^6-3x^5+4x^4-5x^3-6x^2\;-7x-48 & x^3-2x^2+x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^7\;+2x^6\;-\;x^5\;+2x^4} & x^4+4x^3+4x^2+10x+19 \\
0\;+\;4x^6-4x^5+6x^4-5x^3 & \\
\quad\underline{4x^4\;+\;8x^5-4x^4+8x^3\qquad} & \\
\qquad 0\quad+4x^5+2x^4+3x^3-6x^2 & \\
\qquad\quad\underline{-4\,x^5+\;8x^4-4x^3+8x^2} & \\
\qquad\qquad 0\;\;+10x^4\;-x^3\;+\;2x^2\;-7x & \\
\qquad\qquad\quad\underline{-10x^4+20x^3\;-10x^2+20x} & \\
\qquad\qquad\qquad 0\quad+19x^3\;-\;8x^2+13x-48 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad\underline{19x^3+38x^2-19x+38\;\;} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0\quad+30x^2\;-\;6\mathrm{x}\;+10 &
\end{array}$$

Teorema 3.2. Teorema del Residuo. El residuo de la división de un polinomio $p(x)$ por un binomio $x-a$, es igual al valor del polinomio $p(x)$ evaluado en $x = a$, es decir, $r(x) = p(a)$.

El teorema del residuo nos ayuda enormente en el caso que se desee hallar el resto de dividir el polinomio $p(x)$ entre $x-a$.

Ejemplos

1. Hallar el resto de dividir $p(x) = x^5 + 2x^4 -3x^3+ 4x^2 -5x -13$ entre $q(x) = x +1$.

Procedemos de la siguiente manera:

El polinomio $q(x) = x +1$, igualamos a cero, es decir $x +1= 0$, entonces $x = -1$.

El valor de $x = -1$ sustituimos en $p(x)$ para hallar $r(x)$, es decir:

$r(x) = p(-1) = (-1)^5 + 2(-1)^4 -3(-1)^3 + 4(-1)^2 -5(-1) -13$

$r(x) = p(-1) = -1+2+3+ 4+5-13$

$r(x) = p(-1) = 0$

Por lo tanto, el resto de la división es cero.

2. Hallar el resto de dividir $p(x) = x^6 -2x^5 +3x^4 -3x^3 + 2x^2 + x -1$ entre $q(x) = x -3$.

El polinomio $q(x) = x -3$, igualamos a cero, es decir $x -3 = 0$, entonces $x = 3$.

El valor de $x = 3$ sustituimos en $p(x)$ para hallar $r(x)$, es decir:

$r(x) = p(3) = (3)^6 - 2(3)^5 + 3(3)^4 - 3(3)^3 + 2(3)^2 + (3) - 1$

$r(x) = p(3) = 729 - 486 + 243 - 81 + 18 + 3 - 1$

$r(x) = p(3) = 370$

Por lo tanto, el resto de la división es 370.

3. Hallar el resto de dividir $p(x) = 2x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x - 8$ entre $q(x) = 2x - 1$.

El polinomio $q(x) = 2x - 1$, igualamos a cero, es decir $2x - 1 = 0$, entonces $x = \frac{1}{2}$

El valor de $x = \frac{1}{2}$ sustituimos en $p(x)$ para hallar $r(x)$, es decir:

$$r(x) = p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{2}\right) - 8$$

$$r(x) = p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} + \frac{3}{32} - \frac{4}{16} + \frac{5}{8} + \frac{6}{4} + \frac{7}{2} - 8$$

$$r(x) = p\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$$

Por lo tanto, el resto de la división es $-\frac{5}{2}$

DIVISIÓN SINTÉTICA

Es un procedimiento práctico para encontrar el cociente y el residuo de la división entre un polinomio $p(x)$ y un binomio de la forma $x - a$, también se le conoce como la regla de **Ruffini**.

Ejemplos

Hallar el cociente y el resto de la división entre los polinomios indicados:

1. $p(x) = 3x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 3x^2 + 15x + 3$ entre $q(x) = x + 2$

Antes de empezar con el procedimiento es necesario que el polinomio *p(x)* esté totalmente ordenado; luego procedemos a sacar los coeficientes numéricos, y en el caso de que no exista un término intermedio que complete la secuencia de ordenación del polinomio, se debe colocar en su lugar el cero. De *q(x),* hallamos el valor que hace cero el polinomio.

Para nuestro ejemplo, procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc|l} 3 & +4 & +5 & +20 & +3 & +15 & +3 & \underline{-2} \\ \downarrow & -6 & +4 & -18 & 4 & +2 & -34 & \\ \hline 3 & -2 & +9 & +2 & -1 & +17 & -31 & \end{array}$$

Entonces, el cociente de la división es $c(x) = 3x^5 - 2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - x + 17$, y el resto es $r(x) = -31$.

2. $p(x) = x^6 + 4x^5 - 22x^4 - 23x^3 - 3x^2 + 7$ entre $q(x) = x - 3$

Sacamos los coeficientes numéricos del polinomio ordenado y operamos para el valor de x que hace $q(x)$ igual a cero.

$$\begin{array}{ccccccc|l} 1 & +4 & -22 & -23 & -3 & +0 & +7 & \underline{3} \\ \downarrow & +3 & +21 & -3 & -78 & -243 & -729 & \\ \hline 1 & +7 & -1 & -26 & -81 & -243 & -722 & \end{array}$$

Entonces, el cociente de la división es $c(x) = x^5 + 7x^4 - x^3 - 26x^2 - 81x - 243$, y el resto es $r(x) = -722$.

3.3.4. Binomio de Newton

Sean x e y números reales cualesquiera y n un entero positivo, entonces:

$(x+y)^n = x^n + nx^{n\text{-}1}y + \dfrac{n(n-1)x^{n-2}y^2}{2!} + \ldots + \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)x^{n-r}y^r}{r!} + \ldots + y^n$ donde $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)x^{n-r}y^r}{r!}$ representa el término $r+1$-ésimo del desarrollo.

Nota: la expresión $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)]x^{n-r}y^r}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}x^{n-r}y^r$

Algunos casos particulares se detallan a continuación:

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ cuadrado de la suma

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ cuadrado de la diferencia

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + \dfrac{(3)(2)}{2!}xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ cubo de la suma

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + \dfrac{(3)(2)}{2!}xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ cubo de la diferencia

$$(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + \frac{(4)(3)}{2!}x^2y^2 - \frac{(4)(3)(2)}{3!}xy^3 + y^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

Si solo queremos el tercer término de $(x-y)^4$, lo hallamos a partir de:

$\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots[n\quad(r-1)]x^{n-r}y^{\ r}}{r!}$ con r = 2. Es decir:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)]x^{n-r}y^r}{r!} = \frac{4(4-1)x^{4-2}(-y)^2}{2!} = 6x^2y^2$$

Si queremos el sexto término de $(3x^2y - 2z^5)^7$, lo hallamos con $r = 5$, es decir:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}x^{n-r}y^r = \frac{7!}{5!2!}(3x^2y)^2(-2z^5)^5 = (21)(9x^4y^2)(-32z^{25}) = -6048x^4y^2z^{25}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Utilice el binomio de Newton para desarrollar los siguientes productos:

1. $[(2ab)^3 -(4\ )^2]^2 = [(2ab)^3]^2 -2(2ab)^3(4\ y)^2 + [(4\ y)^2]^2$

$= (2ab)^6 -2(2ab)^3(4y)^2 +(4y)^4$

$= 64a^6b^6 -2(8a^3b^3)(16y^2) + 256y^4$

$= 64a^6b^6-256a^3b^3y^2+ 256y^4$

2. $(2x -3y + 4z)^2 =[(2x -3y) + 4z]^2$

$= (2x -3y)^2 + 2(2x -3y)(4z) +(4z)^2$

$= (2x)^2 -2(2x)(3y) +(3y)^2 + 2(2x)(4z) +2(-3y)(4z) +(4z)^2$

$= 4x^2 -12xy +9y^2 +16xz -24yz +16z^2$

$= 4x^2 +9y^2 +16z^2 -12xy +16xz -24yz$

3. $(\sqrt[3]{2mn + 5p^3q^2})^3 = (\sqrt[3]{2mn})^3 +3\ (\sqrt[3]{2mn})^2\ (5p^3q^2)+ 3\ (\sqrt[3]{2mn})\ (5p^3q^2)^2$ $(5p3q2)^3$

$= 2mn +15p^3q^2\ \sqrt[3]{4m^2n^2} +75p^6q^4\ \sqrt[3]{2mn} +125p^9q^6$

4. $(\sqrt{2a} -3w)^4 = (\sqrt{2a})^4 -4\ (\sqrt{2a})^3\ (3w) + 6\ (\sqrt{2a})^2\ (3w)^2 - 4\ (\sqrt{2a})\ (3w)^3$ $-(3w)^4 = 4a^2 -24aw\sqrt{2a} +108aw^2 -108w^3\sqrt{2a} -81w^4$

3.3.5. Factorización

La factorización consiste en descomponer un polinomio como un producto de factores primos.

FACTOR COMÚN

La factorización es sencilla, cuando los términos tienen un factor en común.

Ejemplos.

1. $6m^5n - 12m^4p + 15m^3r^2 - 18m^2 = 3m^2(2m^3n - 4m^2p + 5mr^2 - 6)$

2. $30a^5b^2c - 15a^3b^5c^2 - 25a^2b^6c^3 - 95a^2b^2c^2 = 5a^2b^2c(6a^3 - 3ab^3c - 5b^4c^2 - 19c)$

3. $\frac{4}{5}x^5yz - \frac{14}{15}x^4y^5 + \frac{2}{5}x^3y^2 - \frac{8}{35}yz = \frac{2}{5}y\left(2x^5z - \frac{7}{3}x^4y^4 + x^3y - \frac{4}{7}z\right)$

FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN

Si el polinomio contiene cuatro o más términos, donde hay parejas o ternas con factores en común, se procede a agrupar los términos de la forma más apropiada, y luego se factorizar las veces que sean necesarias. Esta técnica, se llama factorización por agrupación.

Ejemplos

1. $$\begin{aligned} x^2y^3 + 2x^2y^2 - 3yp^2 - 6p^2 &= (x^2y^3 + 2x^2y^2) - (3yp^2 + 6p^2) \\ &= x^2y^2(y+2) - 3p^2(y+2) \\ &= (y+2)(x^2y^2 - 3p^2) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 2bx + 4by - 6bz - ax - ay + az &= (2bx + 4by - 6bz) - (ax + 2ay - 3az) \\ &= 2b(x + 2y - 3z) - a(x + 2y - 3z) \\ &= (x + 2y - 3z)(2b - a) \end{aligned}$$

3. $4x^2z^3 + 4xyz^3 - 2x^2u^2w - 2xyu^2w + 3y^2u^2w - 6y^2z^3 =$

$$= (4x^2z^3 + 4xyz^3 - 6y^2z^3) - (2x^2u^2w + 2xyu^2w - 3y^2u^2w)$$
$$= 2z^3(2x^2 + 2xy - 3y^2) - u^2w(2x^2 + 2xy - 3y^2)$$
$$= (2x^2 + 2xy - 3y^2)(2z^3 - u^2w)\,.$$

SUMA Y DIFERENCIA DE POTENCIAS

Para descomponer una suma o diferencia de potencias con exponente par o impar se debe seguir las siguientes reglas:

$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y - x^{n-3}y^2 - ... - y^{n-1})$, para n un entero positivo impar

$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + y^{n-1})$, para n un entero positivo par o impar

Ejemplos

1. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
2. $x^7 + y^7 = (x + y)(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)$
3. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
4. $x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$

FACTORIZACIÓN DE DIVERSOS TRINOMIOS

TRINOMIO DE LA FORMA SIMPLE

Dado el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, $b,c \in \mathbb{R}$, queremos factorarlo como un producto de factores lineales $(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + (pq)$ donde los números reales p y q son tales que $p + q = b$ y $pq = c$.

Nota: para la factorización de $x^2 + bx + c$, $b,c \in \mathbb{R}$, se busca dos números reales tales que su producto sea c y su suma b.

verificar solo hay 4 ejemplos

Ejemplos.

1. $x^2 - 5x - 176 = (x-16)(x+11)$

2. $b^4 - b^2 = \frac{10}{9} \quad \left(b^2 - \frac{5}{3}\right)\left(b^2 + \frac{2}{3}\right)$

3. $u^8 w^6 + \frac{17}{30} u^4 w^3 - \frac{7}{6} = \left(u^4 w^3 + \frac{7}{5}\right)\left(u^4 w^3 - \frac{5}{6}\right)$

4. $u^{10} - 27u^5 z^2 + 180 z^4 = (u^5 - 12z^2)(u^5 - 15z^2)$

Observacion: los ejemplos de 2 a 5 no son polinomios de segundo grado, sin embargo, se adapto la teoría antes vista para factorarlo. Si quisiésemos ser más rigurosos primeramente se debía haber hecho un cambio de variable para convertirlo en polinomio de segundo grado, factorarlo y luego hacer las sustituciones correspondientes.

TRINOMIO DE LA FORMA COMPUESTA

Dado el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$, queremos factorarlo como un producto de factores lineales $(mx + p)(nx + q) = mnx^2 + (np + mq)x + (pq)$ donde los números reales m, n, p y q, son tales que $mn = a$, $np + mq = b$ y $pq = c$.

Para factorar un trinomio de la forma compuesta, a través de los ejemplos, se presentan dos procedimientos; el lector decidirá cuál es el más fácil de comprender.

Ejemplos

1. $4x^4 - 4x^2 - 3$

Primer procedimiento

Multiplicamos y dividimos por el coeficiente de la mayor potencia, y el polinomio resultante lo reescribimos de la manera apropiada para trabajar como si fuese un polinomio de la forma simple:

$$4x^4-4x^2-3=\frac{16x^4-16x^2-12}{4}$$

$$=\frac{(4x^2)^2-4(4x^2)-12}{4}$$

$$=\frac{(4x^2-6)(4x^2+2)}{4}$$

Segundo procedimiento

Descomponemos el coeficiente numérico de la mayor potencia y de la misma forma lo hacemos con el número que representa la cantidad constante. Los números de la descomposición, seguidos de la raíz cuadrada de la mayor potencia, deben ser colocados de tal menera que, al multiplicar los valores de las diagonales principal y secundaria, sus productos, al ser sumados, nos den el término medio del trinomio.

Si es asi, los factores del trinomio se forman con los valores de las filas Veamos el ejemplo:

Antes de realizar cualquier procedimiento, el polinomio debe estar ordenado.

$4x^4 - 4x^2 - 3$

$2x^2 \qquad\qquad -3 = -6x^2$

$2x^2 \swarrow\!\!\nearrow \qquad \searrow +1 = \underline{+2x^2}$

$\qquad\qquad\qquad -4x2$

$4x^4 - 4x^2 - 3 = (2x^2 - 3)(2x^2 + 1)$

2. $9x^4 + 3x^2 y^3 - 42y^6$

Primer procedimiento

$$9x^4+3x^2y^3-42y^6=3(3x^4+x^2y^3-14y^6)=3\left(\frac{9x^4+3x^2y^3-42y^6}{3}\right)$$

$$=(3x^2)^2+(3x^2y^3)-42(y^3)^2$$

$$=(3x^2+7y^3)(3x^2-6y^3)$$

$$9x^4+3x^2y^3-42y^6=3(3x^2+7y^3)(x^2-2y^3)$$

Segundo procedimiento

$9x^4+3x^2y^3-42y^6=3(3x^4+x^2y^3-14y^6)$, trabajamos con $3x^4+x^2y^3-14y^6$

$3x^4+x^2y^3-14y^6$

$3x^2 \qquad +7y^3=+7x^2y^3$

$1x^2 \qquad 2y^3=\underline{-6}x^2y^3$

$\qquad\qquad +x^2y^3$

$9x^4+3x^2y^3-42y^6=3(3x^2+7y^3)(x^2-2y^3)$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Un trinomio de la forma $a^2x^2+2abx+b^2$, $a\neq 0$, $b\in\mathbb{R}$, que se descompone en $(ax+b)^2$, se llama trinomio cuadrado perfecto. Es decir, $a^2x^2+2abx+b^2=(ax+b)^2$.

Para reconocer que un trinomio es cuadrado perfecto, del trinomio ordenado, del primer y tercer términos se sacan sus raíces cuadradas y el doble producto de estas raíces debe ser igual al segundo término.

Ejemplos

1. $4x^2-28x+49$

Las raíces cuadradas del primer y tercer términos son $2x$ y 7 , y el doble producto de esas raíces es $2(2x)(7)=28x$, esto significa que el trinomio es cuadrado perfecto. Por lo tanto: $4x^2-28x+49=(2x-7)^2$.

2. $144x^4y^4-312x^2y^2z^3+169z^6$

Las raíces cuadradas del primero y segundo términos son $12x^2y^2$ y $13z^3$, y el doble producto de esas raíces es $2(12x^2y^2)(13z^3)=312x^2y^2z^3$, esto significa que el trinomio es cuadrado perfecto. Por lo tanto, $144x^4y^4-312x^2y^2z^3+169z^6=(12x^2y2-13z^3)^2$.

3. $\frac{25}{9}v^6w^6 - 6v^3w^3z^3 + \frac{81}{25}z^6 = \left(\frac{5}{3}v^3w^3 - \frac{9}{5}z^3\right)^2$

$\frac{49}{4}a^8 - \frac{28}{5}a^4b^5 + \frac{16}{25}b^{10} = \left(\frac{7}{2}a^4 - \frac{4}{5}b^5\right)^2$

CUADRADO PERFECTO INCOMPLETO

Un trinomio que puede ser convertido en cuadrado perfecto mediante la adición de un término conveniente, se lo llama imcompleto.

Ejemplos

1. $4x^4y^4 + 8x^2y^2z^2 + 9z^4$

$4x^4y^4 + 8x^2y^2z^2 + 9z^4 = (4x^4y^4 + 12x^2y^2z^2 + 9z^4) - 4x^2y^2z^2$

$= (2x^2y^2 + 3z^2)^2 - 4x^2y^2z^2$

$= \left[(2x^2y^2 + 3z^2) + 2xyz\right]\left[(2x^2y^2 + 3z^2) - 2xyz\right]$

$= (2x^2y^2 + 2xyz + 3z^2)(2x^2y^2 - 2xyz + 3z^2)$

2. $121a4b^4 + 8a^2b^2z^2 + 4z^4$

$121a^4b^4 + 8a^2b^2z^2 + 4z^4 = (121a^4b^4 + 44a^2b^2z^2 + 4z^4) - 36a^2b^2z^2$

$= (11a^2b^2 + 2z^2)^2 - 36a^2b^2z^2$

$= \left[(11a^2b^2 + 2z^2) + 6abz\right]\left[(11a^2b^2 + 2z^2) - 6abz\right]$

$= (11a^2b^2 + 6abz^2 + 2z^2)(11a^2b^2 - 6abz^2 + 2z^2)$

3. $25b^4c^4 - 24b^2c^2m^6p^4 + 4m^{12}p^8$

$25b^4c^4 - 24b^2c^2m^6p^4 + 4m^{12}p^8 = (25b^4c^4 - 20b^2c^2m^6p^4 + 4m^{12}p^8) - 4b^2c^2m^6p^4$

$= (5b^2c^2 - 2m^6p^4)^2 - 4b^2c^2m^6p^4$

$= \left[(5b^2c^2 - 2m^6p^4) - 2bcm^3p^2\right]\left[(5b^2c^2 - 2m^6p^4) + 2bcm^3p^2\right]$

$= (5b^2c^2 - 2m^6p^4 - 2bcm^3p^2)(5b^2c^2 - 2m^6p^4 + 2bcm^3p^2)$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS CON FACTORES $x+a$

Si un polinomio con coeficientes constantes de la forma: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, es divisible por un binomio de la forma $x + a$, a debe ser un divisor de a_0 y se debe buscar entre los divisores positivos y negativos de a_0.

A través de método de división sintética, hallamos los posibles divisores $x + a$.

Ejemplos

1. $x^3 + 7x^2 + 12x + 4$

Los divisores de 4, son: ±1, ± 2 y ± 4

Utilizando el método de división sintética, probamos para ±1, ±2 y ± 4 y determinamos cuál cumple la condición o no.

Una vez hechas las pruebas, se determina que, con el -2, cumple la condición, así:

1	+7	+12	+4	−2
↓	−2	10	−4	
1	+5	+2	**0**	

Por lo tanto: $x^3 + 7x^2 + 12x + 4 = (x + 2)(x^2 + 5x + 2)$

2. $x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 19x + 12$

Los divisores de 12, son: ±1, ± 2, ±3, ±6 y ±12.

Utilizando el método de división sintética probamos para ±1, ± 2, ±3, ±6 y ±12 y determinamos cuál cumple la condición o no.

Una vez hechas las pruebas, se determina que con el 3 y 4, se cumple la condición, así:

1	−8	+20	−19	+12	3	
↓	3	−15	+15	−12		$(x-3)$
1	−5	+5	−4	**0**		

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -5 & +5 & -4 & \underline{4} \\ \downarrow & +4 & -4 & +4 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} & \end{array} \qquad (x-4)$$

Por lo tanto: $x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 19x + 12 = (x-3)(x-4)(x2 - x + 1)$

3. $10x^4 - x^3 + 13x^2 - 39x - 18$

Los divisores de 10 son: $\pm 1, \pm 2, \pm 5$ y ± 10

Los divisores de 18 son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9$ y ± 18

Los divisores de 18 dividimos para los de 10 y obtemos:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \pm 9,\ \pm 18,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{9}{2},\ \pm\frac{1}{5},\ \pm\frac{2}{5},\ \pm\frac{3}{5},\ \pm\frac{6}{5},\ \pm\frac{9}{5},\ \pm\frac{18}{5}$$

$$\pm\frac{1}{10},\ \pm\frac{3}{10},\ \pm\frac{9}{10}$$

En el caso de que no se quisiera hacer todas divisiones para determinar en cuál se cumple la condición, se puede sustituir el divisor que se quiere a probar en el polinomio, y si el resultado es cero, ese es un valor que hay que trabajar con la división sintética.

Si realizamos el procedimiento sugerido en nuestro ejemplo, se determina que debemos trabajar con el $\frac{3}{2}$ y $-\frac{2}{5}$.

Utilice el método de la división sintética con $\frac{3}{2}$ y $-\frac{2}{5}$ y comprueba que $10x^4 - x^3 + 13x^2 - 39x - 18 = (2x-3)(5x+2)(x^2 + x + 3)$.

EJERCICIOS PROPUESTOS 3.1

1. Si $p(y) = \frac{y^3}{2} - \frac{2y^2}{3} - 3$ y $q(y) = 2y^4 + \frac{4}{5}y^2 - \frac{5}{6}y - 1$, halle $2p(y) - q(y)$.
2. Si $p(x) = x^5 + 5x^2 - 9$ y $q(x) = -8x^5 - 7x^3 - 2x^2 + x - 15$, halle $5p(x) - 2q(x)$.
3. $p(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 13$ entre $q(x) = x - 1$ y compruebe.
4. $p(x) = x^7 + 2x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 6x^2 - 7x - 48$ entre $q(x) = x^3 + x - 2$ y compruebe.

5. Hallar el resto de dividir $p(x) = x^5 + 2x^4 - 5x - 13$ entre $q(x) = x - 2$.

6. Hallar el resto de dividir $p(\mathrm{x}) = 4x^6 - 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$ entre $q(x) = x - 3$.

7. Si $p(x) = 4x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 3x^2 + 15x - 5$ divide para $q(x) = x - 4$, halle el resto y su cociente.

8. Si $p(x) = x^5 - 22x^4 - 23x^3 - 3x^2 + 7$ divide para $q(x) = x - 5$, halle el resto y su cociente.

9. Utilice el binomio de Newton para hallar:

a) $(2x - 3y)^4$

b) $(3x - 2y + z)^5$

c) $(x^2 - 3y^2 + 2z^3)^4$

10. Factorar las siguientes expresiones

a) $10p^3 + 25p^2 + 15p - 20p^4$

b) $400a^4c^2 - 100b^4m^2$

c) $(a^4b^2 - c^4b^2) - (p^2a^4 - p^2c^4)$

d) $x^4 - y^2 + 4x^2 + 4 - 4yz - 4z^2$

e) $9p^4 - 33p^2q^2 + 16q^4$

f) $40a^2 + 6ab - 70b^2$

g) $36x^2 - 36xb + 9b^2$

h) $17z^5 - 68z^4 + 68z^3$

i) $12m^5n^2 + 9m^4n + 6m^3n^3$

j) $a^2 (m^3 - 8p^3) - c^2 (m^3 - 8p^3)$

k) $p^2 (27 + 8m^3) - q^2 (27 + 8m^3)$

l) $36p^2 - 4 - 84pqr + 49q^2r^2$

m) $36x^2 - 9y^2 - 60xy^2 - 25y^4$

n) $4p^2 - 12p + 9 - 25y^2$

o) $m(x^4 y^4 - 16a^2 y^2) - n(x^4 y^4 - 16a^2 y^2)$

p) $p\,(x^4 y^4 - 16) + q\,(x^4 y^4 - 16)$

q) $a\,(x^4 y^4 - 625) - b(x^4 y^4 - 625)$

3.4. Operaciones con expresiones algebraicas

Para la suma o diferencia de expresiones algebraicas, un primer paso es encontrar el mínimo común múltiplo (MCM) que se halla al factorizar los denominadores y tomar el producto de los distintos factores, usando la potencia superior que aparezca en cualquiera de ellos.

Ejemplos

1. $$\frac{2}{x+1}+\frac{x}{x+2} \quad \frac{2\,(x+2)+x\,(x+1)}{(x+1)\,(x+2)} \quad \frac{x^2+3x+4}{(x+1)(x+2)}$$

2. $$\frac{4m}{m^2-1}-\frac{3}{m+1}+2=\frac{4m}{(m-1)(m+1)}-\frac{3}{m+1}+2$$

$$=\frac{4m-3(m-1)+2(m-1)(m+1)}{(m-1)(m+1)}$$

$$=\frac{2m^2+m+1}{(m-1)(m+1)}$$

3. $$\frac{x}{x^2-4x+3} \quad \frac{2x-3}{x^2-x-6} \quad \frac{x}{(x-1)(x-3)} \quad \frac{2x-3}{(x+2)(x-3)}$$

$$=\frac{x(x+2)+2(2x-3)(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

$$=\frac{5x^2-8x+6}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

Para el producto de expresiones algebraicas, el requerimiento es factorizar todos los polinomios para luego proceder a simplificar. Para el caso de la división, esta se la convierte en producto y se procede como antes.

Ejemplos.

1. $$\frac{x^2-2x-35}{x^2-36}\,\frac{x+6}{x^2-49}\,\frac{x-6}{x^2-x-30}=\frac{(x-7)(x+5)}{(x-6)(x+6)}\,\frac{x+6}{(x-7)(x+7)}\,\frac{x-6}{(x-6)(x+5)}$$

$$=\frac{1}{(x+7)(x-6)}$$

2. $$\left(\frac{2x^3+x^2-13x+6}{x^3-2x^2+4x-8}\right)\div\left(\frac{2x-1}{x^2-2x+4}\right)=\left(\frac{2x^3+x^2-13x+6}{x^3-2x^2+4x-8}\right)\left(\frac{x^2-2x+4}{2x-1}\right)$$

$$=\frac{(2x-1)(x-2)(x+3)}{(x^2+4)(x-2)}\,\frac{x^2-2x+4}{2x-1}$$

$$=\frac{(x+3)(x^2-2x+4)}{(x^2+4)}$$

3. $$\frac{2x^2-7x-15}{x^2+7x}\div\frac{2x^2+3x}{x^3+7x^2}=\frac{2x^2-7x-15}{x^2+7x}\,\frac{x^3+7x^2}{2x^2+3x}$$

$$=\frac{(x-5)(2x+3)}{x(x+7)}\,\frac{x^2(x+7)}{x(2x+3)}$$

$$=x-5$$

3.5. Racionalización

La racionalización es un proceso que consiste en eliminar radicales ya sea de los denominadores o numeradores, para lo cual se multiplica tanto numerador o denominador por la conjugada de la expresión radical que se quiere eliminar.

Ejemplos

1. Racionalizar el denominador de $\frac{x}{3-\sqrt{x-2}}$.

$$\frac{x}{3-\sqrt{x-2}}=\frac{x\left(3+\sqrt{x-2}\right)}{\left(3-\sqrt{x-2}\right)\left(3+\sqrt{x-2}\right)}=\frac{x\left(3+\sqrt{x-2}\right)}{9-\left(\sqrt{x-2}\right)^2}=\frac{x\left(3+\sqrt{x-2}\right)}{11-x}$$

2. Racionalizar el numerador de $\dfrac{5-\sqrt{3x+1}}{x-8}$.

$$\frac{5-\sqrt{3x+1}}{x-8}=\frac{\left(5-\sqrt{3x+1}\right)\left(5+\sqrt{3x+1}\right)}{(x\quad 8)\left(5+\sqrt{3x+1}\right)}=\frac{24-3x}{(x-8)\left(5+\sqrt{3x+1}\right)}=\frac{-3}{5+\sqrt{3x+1}}$$

3. Racionalizar el denominador de $\dfrac{1+\sqrt{x-3}}{3-\sqrt{x+1}}$.

$$\frac{1+\sqrt{x-3}}{3-\sqrt{x+1}}=\frac{\left(1+\sqrt{x-3}\right)\left(3+\sqrt{x+1}\right)}{\left(3-\sqrt{x+1}\right)\left(3+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{\left(1+\sqrt{x-3}\right)\left(3+\sqrt{x+1}\right)}{9-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}\quad\frac{\left(1+\sqrt{x-3}\right)\left(3+\sqrt{x+1}\right)}{8-x}$$

4. Racionalizar el denominador de $\dfrac{x-1}{2-\sqrt[3]{2x+3}}$.

$$\frac{x-1}{2-\sqrt[3]{2x+3}}=\frac{(x-1)\left[4+2\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{(2x+3)^2}\right]}{\left(2-\sqrt[3]{2x+3}\right)\left[4+2\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{(2x+3)^2}\right]}$$

$$=\frac{(x-1)\left[4+2\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{(2x+3)^2}\right]}{2^3-\left(\sqrt[3]{2x+3}\right)^3}$$

$$=\frac{(x-1)\left[4+2\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{(2x+3)^2}\right]}{5-2x}$$

5. Racionalizar el denominador y numerador de $\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

En el "cálculo de límites" se requiere racionalizar expresiones como la anterior, para lo cual es recomendable un cambio de variable, $u^{12}=x$. El 12 es el mínimo común múltiplo entre 4 y 3 (índices de las raíces). Así se obtiene una expresión más fácil de trabajar una vez que se haya cambiado la tendencia de x a u.

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\frac{\sqrt[3]{u^{12}}-1}{\sqrt[4]{u^{12}}-1}=\frac{u^4-1}{u^3-1}=\frac{(u-1)(u+1)(u^2+1)}{(u-1)(u^2+u+1)}=\frac{(u+1)(u^2+1)}{(u^2+u+1)}$$

3.6. Inducción matemática

El método de inducción matemática sirve para realizar algunas demostraciones que impican determinar la veracidad de una generalización. Por ejemplo, con la inducción matemática se puede demostrar que la suma de los n primeros impares es n^2 .

Teorema 3.3. Sea $P(n)$ un enunciado que es válido para todo natural n .

Supongamos que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $P(1)$ es verdadero.

b) Para todo natural k , si $P(k)$ es verdadero, entonces $P(k+1)$ es verdadero.

Entonces, $P(n)$ es veradero para todos los números naturales n.

Al aplicar el principio de inducción matemática, se debe probar que:

1. $P(1)$ es verdadero.
2. Suponer que $P(k)$ es verdadero $\rightarrow$ **Hipótesis inductiva**
3. Demostrar que $P(k+1)$ es verdadero $\rightarrow$ **Tesis**

Ejemplos

1. Demuestre que: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1),\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Solución:

Sea $\qquad P(n):\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

Probemos que es verdad para $P(1)$: $1^2 = \frac{1}{6}(1+1)[2(1)+1] = 1$, se cumple.

Supongamos que P(k) es verdadero, es decir:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k}{6}(k+1)(2k+1) \quad \rightarrow \text{Hipótesis inductiva}$$

Por demostrar que P(k +1) es verdadero, es decir:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)}{6}(k+2)(2k+3) \quad \rightarrow \text{Tesis}$$

Consideremos el lado izquierdo y usemos la hipótesis de inducción para obtener el lado derecho de la ecuación:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2) + (k+1)^2$$

$$= \frac{k}{6}(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right]$$

$$= (k+1)\left(\frac{2k^2 + 7k + 6}{6}\right)$$

$$= \frac{(k+1)}{6}(k+2)(2k+3)$$

Por lo tanto, $P(n)$ es válido para todo natural n.

2. Demuestre que: $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Solución:

Sea $P(n) : 2+4+6+...+2n = n(n+1)$.

Probemos que es verdad para $P(1) : 2 = 1(1+1) = 2$, se cumple.

Supongamos que $P(k)$ es verdadero, es decir:

$2+4+6+...+2k = k(k+1) \rightarrow$ Hipótesis inductiva

Por demostrar que $P(k+1)$ es verdadero, es decir:

$2+4+6+...+2k+2(k+1) = (k+1)(k+2) \rightarrow$ Tesis

Consideremos el lado izquierdo y usemos la hipótesis de inducción para obtener el lado derecho de la ecuación:

$$\begin{aligned} 2+4+6+...+2k+2(k+1) &= (2+4+6+...+2k)+2(k+1) \\ &= k(k+1)+2(k+1) \\ &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(n)$ es válido para todo natural n .

3. Demostrar que 9 es un factor de $10n+1+3.10n+5$ para todo entero positivo n .

Solución:

Lo que se quiere demostrar es que: $\exists p \in \mathbb{Z}^+ \ / 10^{n+1}+3.10^n+5 = 9p$

Sea $P(n) : 10^{n+1}+3.10^n+5$

Probemos que es verdad para $P(1)$, es decir: $\exists p \in \mathbb{Z}^+ \ /10^2 + 3.10^1 + 5 = 9p$, entonces $135 = 9p \Longrightarrow p = 15$, se cumple.

Supongamos que $P(k)$ es verdadero, es decir:

$\exists p \in \mathbb{Z}^+ + /10^{k+1} + 3.10^k + 5 = 9p$ $\quad \rightarrow$ Hipótesis inductiva

Por demostrar que $P(k+1)$ es verdadero, es decir:

$\exists m \in \mathbb{Z}^+ + /10^{k+2} + 3.10^{k+1} + 5 = 9m$ $\ \rightarrow$ Tesis

Consideremos el lado izquierdo y usemos la hipótesis de inducción para obtener el lado derecho de la ecuación:

$$\begin{aligned} 10^{k+2} + 3.10^{k+1} + 5 &= 10.10^{k+1} + 10(3.10^k) + 5 \\ &= 10(10^{k+1} + 3.10^k) + 5 \text{ , como } 10^{k+1} + 3.10^k = 9p - 5 \\ &= 10(9p - 5) + 5 \\ &= 90p - 50 + 5 \\ &= 90p - 45 \\ &= 9m \text{ con } m = (10p - 5) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 3.2

1. Halle la suma $\dfrac{x}{x\quad 1} + \dfrac{x+3}{3x\quad 2} + \dfrac{1}{x}$

2. Halle la suma $\dfrac{2x-3}{x^2-4} - \dfrac{x}{x\quad 2} + \dfrac{7}{x\quad 2}$

3. Halle la suma $\dfrac{x}{x^2-5x\quad 6} + \dfrac{2x-3}{x^2\quad x\quad 12} + \dfrac{x-1}{x^2\quad 2x\quad 8}$

4. Simplificar $\dfrac{x^2-17x+72}{x^2-64} \quad \dfrac{2x^2+3x}{2x^2-15x-27} \quad \dfrac{x+8}{x^2-2x}$

5. Simplificar $\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{2x^3+15x^2+27x+10}\;\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-9}\div\dfrac{x^2-4x+3}{x}$

6. Simplificar $\dfrac{6x^4+11x^3-4x^2+11x-10}{x^4-1}\div\dfrac{6x^2+11x-10}{x^2-4x-21}\;\dfrac{x^3-1}{x^3-6x^2-6x-7}$

7. Racionalizar el denominador de: $\dfrac{x}{5+\sqrt{3x-1}}$

8. Racionalizar el numerador de: $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{5x-4}}{x-5}$

9. Racionalizar el denominador de: $\dfrac{2-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x-1}}$

10. Racionalizar el denominador de: $\dfrac{x-1}{3+\sqrt[3]{x+1}}$

11. Racionalizar el denominador de: $\dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5x+2}}$

12. Demuestre que: $1+4+7+...+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2},\ \forall n\in\mathbb{Z}^+$

13. Demuestre que: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n}{6}(n+1)(2n+1),\ \forall n\in\mathbb{Z}^+$

14. Demuestre que: $2+6+18+...+2.3^{n-1}=3^n-1,\ \forall n\in\mathbb{Z}^+$

15. Demuestre que: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\dfrac{n^2}{4}(n+1)^2,\ \forall n\in\mathbb{Z}^+$

16. Demuestre que: $1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1),\ \forall n\in\mathbb{Z}^+$

17. Demuestre que $n(n+1)(n+2)$ es divisible entre 6.

18. Demuestre que 3 es un factor de n^3-n+3

19. Demuestre que 4 es un factor de $5^n - 1$

20. Demuestre que $8^n - 3^n$ es divisible entre 5 para todos los números naturales n.

CAPÍTULO 4. ECUACIONES Y DESIGUALDADES

4.1. Introducción

Muchos problemas de aplicación de la vida real pueden ser modelados a través de ecuaciones lineales y cuadráticas. En problemas de maximización y minimización también están presentes las ecuaciones lineales y las desigualdades.

4.2. Ecuaciones lineales

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, que se denominan miembros de la ecuación. En ella aparecen números y letras (variables) relacionadas mediante operaciones matemáticas. Las variables de una ecuación pueden representar cantidades físicas que modelan fenómenos particulares.

Resolver una ecuación significa encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación es verdadera. Estos valores se conocen como soluciones de la ecuación y se dice que la satisfacen. Al conjunto de todas las soluciones se les llama conjunto solución de la ecuación.

Ejemplos

1. Resuelva la ecuación

$$\frac{3x}{5x-2}=4+\frac{7}{5x-2}$$

$$\frac{3x}{5x-2}=4+\frac{7}{5x-2} \qquad MCM \quad =5x-2$$

$$3x=4(5x-2)+7$$

$$x=\frac{1}{17}$$

2. Resuelva la ecuación

$$\frac{5}{3\ \ -5}+\frac{4}{3\ \ +5}=\frac{2x+5}{9\ \ ^{2}-25}$$

$$\frac{5}{3x-5}+\frac{4}{3x+5}=\frac{2x+5}{(3x-5)(3x+5)} \qquad MCM=(3x-5)(3x+5)$$

$$5(3x+5)+4(3x-5)=2x+5$$

$$x=0$$

3. Resuelva la ecuación

$$\frac{4-2x}{x-5}+\frac{2x+3}{x+6}=\frac{x}{x^2+x-30}$$

$$\frac{4-2x}{x-5}+\frac{2x+3}{x+6}=\frac{x}{(x+6)(x-5)} \qquad MCM = (x+6)(x-5)$$

$$(4-2x)(x+6)+(2x+3)(x-5)=x$$

$$4x+24-2x^2-12x+2x^2-10x+3x-15=x \quad \Rightarrow \quad x=\frac{9}{16}$$

4. Resuelva la ecuación

$$\sqrt{4x^2+x-2}=2x-7$$

$$\left(\sqrt{4x^2+x-2}\right)^2=(2x-7)^2$$

$$4x^2+x-2=4x^2-28x+49$$

$$x=\frac{51}{29}$$

5. Tres hermanos se reparten \$ 372. Si lo que le corresponde a cada uno es el resultado de repartir la cantidad en tres números enteros pares consecutivos, ¿Cuánto le corresponde a cada hermano?

Solución:

Asignemos al primer número par $2x$ al segundo $2x + 2$, y al tercero $2x + 4$.

Al plantear el problema tenemos que: $2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 372$

Al resolver la ecuación, se obtiene: $x = 61$.

Entonces, al primer hermano le corresponde \$ 122, al segundo \$ 124, y al tercero \$ 126.

6. Hace 15 años, la edad de Carlos era el triple que la edad de Daniel y dentro de 15 años, la edad de Carlos será los $\frac{5}{3}$ de la de Daniel. ¿Cuáles son las edades actuales?

Solución:

Organizamos los datos en una tabla. Asignemos a x la edad de Daniel hace 15 años.

	Edad hace 15 años	Edad actual	Edad dentro de 15 años
Carlos	3x	3x+15	3x+30
Daniel	x	x+15	x+30

Tabla 3.1. La tabla muestra la organización de los datos del ejemplo 6

Planteemos el problema:

Dentro de 15 años, la edad de Carlos será los $\frac{5}{3}$ de la de Daniel, es decir:

$$3x+30=\frac{5}{3}(x+30) \quad \Rightarrow \quad 4x=60 \quad \Rightarrow \quad x=15$$

Entonces, la edad actual de Carlos es 60, y la de Daniel 30.

7. María ahorró \$ 750 más que Gloria. Si la razón entre lo que ahorró cada una es 3 a 5, ¿cuánto ahorró cada una?

Supongamos que el dinero que ahorró Gloria es x , entonces María ahorró x+750 Planteamos en el problema que, la razón entre los ahorros es 3 a 5, es decir:

$$\frac{x}{x+750}=\frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad 5x=3x+2250 \quad \Rightarrow \quad x=1125$$

Por lo tanto, Gloria ahorró \$ 1225 y María \$ 1875.

EJERCICIOS PROPUESTOS 4.1

Hallar el valor de la variable de las siguientes ecuaciones lineales.

1. $\dfrac{w}{w+3} - \dfrac{w}{w-3} = \dfrac{3w-4}{w^2-4}$

2. $\dfrac{9}{z^2-4} - \dfrac{4}{z+2} = \dfrac{5}{z-2}$

3. $\dfrac{x}{x-4} + \dfrac{2}{x-5} = \dfrac{x-1}{x^2-9x+20}$

4. $\dfrac{2}{2m+1} - \dfrac{3}{2m-1} = \dfrac{-2m+7}{4m^2-1}$

5. $\dfrac{5}{24(x+3)} = \dfrac{1}{3(x-3)} + \dfrac{1}{8(x-5)}$

6. $\dfrac{5}{w+7} - \dfrac{w}{w-3} = \dfrac{-w^2+1}{w^2+4w-21}$

7. $\dfrac{5}{w+7} - \dfrac{w}{w+3} = \dfrac{-w^2+1}{w^2+4w-21}$

8. $\dfrac{9+3x^2}{6x^2+7x-5} - \dfrac{x}{2x-1} = \dfrac{7}{3x-5}$

9. $\dfrac{11}{x^3-8} + \dfrac{3x}{x^2+2x+4} = \dfrac{6}{2x-4}$

10. $\dfrac{2}{w^2-49} - \dfrac{1}{w+7} = \dfrac{3}{w-7}$

11. $x+\sqrt{x^2-8}-2=0$

12. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=1$

13. $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}=0$

14. $\dfrac{7x-2}{11(x^2-3)} - \dfrac{1}{5(x-2)} = \dfrac{48}{55(2x-1)}$

15. $\dfrac{1}{19(x-3)} = \dfrac{1}{27(x-3)} + \dfrac{8x+21}{513(x^2+3x+9)}$

16. $\dfrac{4}{9(x-1)} - \dfrac{1}{16(x-2)} = \dfrac{13}{144(x+2)} + \dfrac{7x-2}{24(x^2-2x+4)}$

17. $\dfrac{5z-2}{z+1} + \dfrac{9z-1}{2} = \dfrac{9z^{32}+45z}{2(z^2+4z+3)}$

18. $\dfrac{3x^2-1}{2x} + \dfrac{2x+3}{x+1} = \dfrac{6x}{4} + \dfrac{2x}{x+1}$

19. $\dfrac{2x^3-3}{2} - \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2x^5-2x^3-5x^2}{2(x^2-1)}$

20. $\dfrac{x-7}{2x+1} - \dfrac{3x}{x^2-4} = \dfrac{x^3-13x^2-x+2}{2x^3+x^2-8x-4}$

21. Las edades de María, Karla y Martha son tres números pares consecutivos. Calcula la edad de la menor de ellas, si la suma de las edades es 60 años.

22. Tres hermanos se reparten \$ 756. Si lo que le corresponde a cada uno es el resultado de repartir la cantidad en tres números enteros impares consecutivos. ¿cuánto acumula el tercer hermano si ya tenía la misma cantidad que le tocó al primero?

23. Hace 12 años, la edad de Stefy era el triple que la edad de Santy y dentro de 10 años, la edad de Stefy será los $\frac{4}{3}$ de la de Santy. ¿Cuáles son las edades actuales?

24. Mónica gana \$ 300 más que Estefanía. Si ambas gastan la tercera parte de sus sueldos, la diferencia entre sus gastos es \$ 100 ¿Cuánto gana cada una? ¿Cuánto gastaron? ¿Con cuánto se quedan?

25. Sofía tiene la mitad de la mitad de lo que Gloria. Si Sofía ganara \$ 10 y Gloria perdiera \$ 5, ambas tendrán igual cantidad de dinero. ¿Cuánto tienen entre las dos?

26. Compré el cuádruple del número de caballos que de vacas. Si hubiera-comprado cinco caballos menos y 10 vacas más, tendrá el mismo número de caballos que de vacas. ¿Cuántos caballos compré?

27. El área de un terreno cuadrado es 144 m^2. ¿Cuántos metros de alambre se necesitarán para cercar dicho terreno si el cerco debe dar cinco vueltas?

28. En un terreno de forma recta rectangular, el largo excede en 6 metros al ancho. Si el ancho se duplica y el largo disminuye en 8 metros, el área del terreno no varía. ¿Cuál es el perímetro del terreno original?

29. En una granja hay gallinas, conejos y cuyes. El número de gallinas es la mitad de los cuyes y el número de conejos excede en cinco al de gallinas. Si el número total de patas de los tres animales es de 160, ¿cuántas gallinas, conejos y cuyes hay en la granja?

30. David invirtió la tercera parte de lo que gana y luego gastó la mitad de lo que le quedaba, y los $ 200 restante deposita en el banco. ¿Cuánto gana David?

4.3. Sistemas de ecuaciones lineales

Cuando nos planteamos la resolución de varias ecuaciones a la vez con varias incógnitas, estamos ante un sistema y, en el caso más sencillo, donde todas las ecuaciones sean lineales, se llama sistema de ecuaciones lineales.

Definición 4.1. Se llama sistema de ecuaciones lineales a un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde x_1 , x_2 ,..., x_n son las incógnitas, b_1 b_2 , ,..., b_m se denominan términos independientes y los números a_{ij} a se llaman coeficientes de las incógnitas.

Cuando los términos independientes son cero, el sistema se llama homogéneo. Dado un sistema de ecuaciones, el objetivo es hallar todas sus soluciones, es decir, encontrar todos los valores de x_1 x_2 , ,..., x_n que verifican todas las ecuaciones.

Atendiendo al número de soluciones, los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en tres tipos: sistema incompatible, el que no posee solución; sistema compatible determinado, que tiene una solución única; y sistema compatible indeterminado, con infinitas soluciones.

4.3.1. Sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

Entre las técnicas para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2 tenemos: reducción o eliminación, sustitución, igualación y representación gráfica.

TÉCNICA DE REDUCCIÓN.

En esta técnica, se elige la variable que se va a eliminar; luego se multiplica cada término de las ecuaciones por números que permitan obtener coeficientes numéricos iguales y de signos contrarios; sumamos y nos queda una ecuación con una incógnita.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 1)\ 5x - 3y = 2 \\ 2)\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$$

Supongamos que queremos eliminar la variable x. Multipliquemos la primera ecuación por 3 y la segunda por -5 , y se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{cases} 15x - 9y = 6 \\ -15x + 20y = 5 \end{cases}$$

Al sumar ambas ecuaciones nos queda: $11y = 11$ de donde $y = 1$. Luego, sustituyendo el valor de y en la primera ecuación del sistema original: $5x - 3(1) = 2$ se obtiene $x = 1$. Por lo tanto, la solución del sistema es $(1, 1)$.

Ejemplo 2

$$\begin{cases} 1)\ \ 7x - y = 6 \\ 2)\ \ 11x - 3y = -12 \end{cases}$$

Eliminemos la variable y. Multipliquemos la primera ecuación por -3 y la segunda la dejamos igual, y se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{cases} -21x + 3y = -18 \\ 11x - 3y = -12 \end{cases}$$

Al sumar ambas ecuaciones se obtiene: $-10x = -30$ de dónde $x = 3$. Luego sustituimos el valor de x en la primera ecuación del sistema original: $7(3) - y = 6$ se obtiene $y = 15$. Siendo la solución del sistema (3, 15) .

TÉCNICA DE SUSTITUCIÓN

La técnica de sustitución consiste en despejar una de las variables de cualesquiera de las ecuaciones y luego se le sustituye en la otra ecuación para hallar el valor de la variable no despejada.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 1) \quad 4x + 3y = 7 \\ 2) \quad 2x - y = 1 \end{cases}$$

Si despejando la variable x de la primera ecuación nos queda $y = 2x - 1$ y reemplazando en la segunda, obtenemos $4x + 3(2x-1) = 7$ de donde $y = 1$, sustituyendo este valor en $y = 2(1) - 1$ nos da $y = 1$. Entonces la solución del sistema es (1,1).

Ejemplo 2

Al Despejar la variable x de la primera ecuación nos queda $x = \frac{2+3y}{5}$, y al reemplazarla en la segunda obtenemos $3\left(\frac{2+3y}{5}\right) - 4y = -1$ de donde $y=1$, sustituyendo este valor en $x = \frac{2+3(1)}{5}$ nos da $x = 1$. Entonces la solución del sistema es (1,1).

TÉCNICA DE IGUALACIÓN

La técnica de igualación consiste en despejar una misma variable de ambas ecuaciones y luego se las iguala, al resolver se obtiene la solución de la variable no despejada.

Ejemplo 1

$$x = \frac{2 + 3(1)}{5}$$

Despejemos la variable *x* de ambas ecuaciones, y tenemos:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-1 + 3y}{2} \\ x = \dfrac{6 - 4y}{5} \end{cases}$$

Igualamos las ecuaciones despejadas y resolvemos:

$$\frac{6 - 4y}{5} = \frac{-1 + 3y}{2} \quad \Rightarrow \quad 12 - 8y = -5 + 15y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{17}{23}$$

Al reemplazar el valor de *y* en cualquiera de las ecuaciones despejadas, obtenemos: $x = \dfrac{-1 + 3\left(\dfrac{17}{23}\right)}{2} = \dfrac{14}{23}$

Por lo tanto, la solución del sistema es $\left(\dfrac{14}{23}, \dfrac{17}{23}\right)$

Ejemplo 2

$$\begin{cases} 1) \quad 6x - 7y = 10 \\ 2) \quad 2x - 4y = 9 \end{cases}$$

Despejemos la variable *y* de ambas ecuaciones, tenemos:

$$\begin{cases} y = \dfrac{6x - 10}{7} \\ x = \dfrac{x - 7}{2x + 1} \end{cases}$$

Igualamos las ecuaciones despejadas y resolvemos:

$$\frac{2x-9}{4}=\frac{6x-10}{7} \Rightarrow 14x-63=24x-40 \Rightarrow x=-\frac{23}{10}$$

Reemplazando el valor de x en cualquiera de las ecuaciones despejadas, obtenemos:

$$y=\frac{2\left(-\frac{23}{10}\right)-9}{4}=-\frac{17}{5}$$

Entonces, la solución del sistema es $\left(-\frac{23}{10},-\frac{17}{5}\right)$

En caso de que, a partir de las gráficas de las ecuaciones lineales del sistema, se pueda determinar con facilidad la solución de esta, se acude a la representación gráfica. En ocasiones, se combinan la representación gráfica con cualquiera de las técnicas antes estudiadas para hallar la solución de un sistema de ecuaciones lineales de orden 2x2.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

La representación gráfica consiste en graficar las ecuaciones lineales y determinar la solución mediante la intersección de estas.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 1)\quad -x+y=-4 \\ 2)\quad x+y=2 \end{cases}$$

Determinando las intersecciones con los ejes de las ecuaciones lineales y graficando en el plano cartesiano (ver figura 4.1). Tenemos:

Ecuación 1): (0,- 4) y (4,0) Ecuación 2): (0,2) y (2,0)

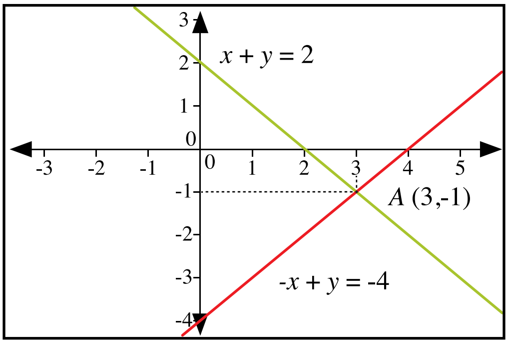


Figura 4.1. Representación gráfica del sistema, ejemplo 1

Como se puede observar, en la figura 4.1, que las rectas se cortan en el punto (3,-1). En este caso, el sistema, se denomina compatible determinado.

Ejemplo 2

$$\begin{cases} 1) \quad 2x - 2y = 6 \\ 2) \quad x - y = 3 \end{cases}$$

Determinando las intersecciones con los ejes de las ecuaciones lineales, representamos en el plano cartesiano (ver figura 4.2).

En la figura 4.2, se observa que la gráfica de la recta es la misma para ambas ecuaciones, es decir, las rectas son coincidentes. Si las rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones y se le conoce como **sistema compatible indeterminado**.

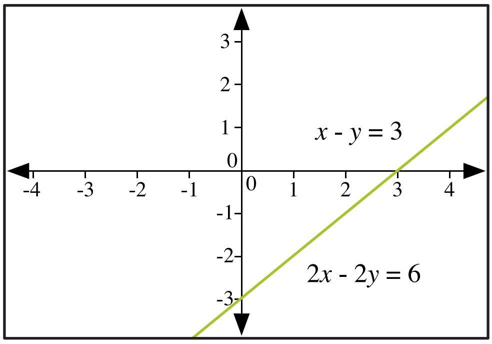


Figura 4.2. Representación gráfica del sistema, ejemplo 2

Ejemplo 3

$$\begin{cases} 1) \ -x+y=4 \\ 2) \ x-y=2 \end{cases}$$

Determinando las intersecciones con los ejes de las ecuaciones lineales, representamos en el plano cartesiano (ver figura 4.3).

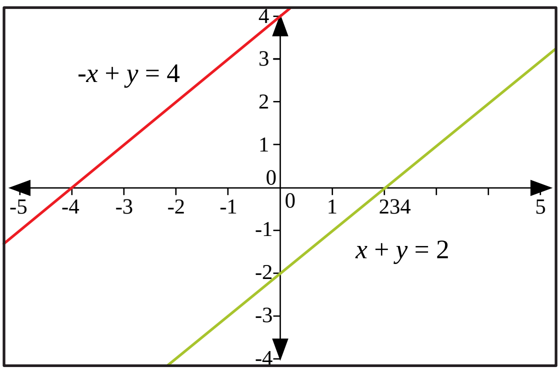


Figura 4.3. Representación gráfica del sistema, ejemplo 3

En la figura 4.3, se observa que las dos ecuaciones lineales son rectas paralelas; entonces, no tienen ningún punto en común. Por lo tanto, el sistema no tiene solución. Si el sistema no tiene solución, se llama sistema incompatible.

En algunas ocasiones, nos encontraremos con sistemas como el del ejemplo

4, que, para poder resolverse utilizando las técnicas antes vistas primero se hace un cambio de variable para transformarlas a ecuaciones de la forma $ax + by = c$.

Ejemplo 4

$$\begin{cases} 1) \quad \dfrac{1}{x-2y}+\dfrac{2}{2y-3x}=4 \\ 2) \quad \dfrac{3}{x-2y}+\dfrac{4}{2y-3x}=-2 \end{cases}$$

Haciendo $a=\dfrac{1}{x-2y}$ y $b=\dfrac{1}{2y-3x}$, las ecuaciones 1) y 2) del sistema se transforma en: $\begin{cases} 3) \ a+2b=4 \\ 4) \ 3a+4b=-2 \end{cases}$

Luego, aplicando la técnica de reducción se tiene que:

$$\begin{cases} 3) \ a+2b=4 & (2) \\ 4) \ 3a+4b=-2 & (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+4b=8 \\ -3a-4b=2 \end{cases} \Rightarrow \quad a=-10$$

Al reemplazar el valor de a en la ecuación 3) obtenemos: $-10+2b=4$, lo que implica que $b = 7$.

Con los valores de *a* y *b*, resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5) \quad \dfrac{1}{x-2y}=-10 \\ 6) \quad \dfrac{1}{2y-3x}=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-\dfrac{1}{10} \\ -3x+2y=\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

Si aplicamos la técnica de reducción, obtenemos $-2x=-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad x=-\dfrac{3}{140}$

Al reemplazar en 5) el valor de x, se tiene: $-2y=-\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{140} \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{11}{280}$

4.3.2. Sistemas de ecuaciones lineales 3x3.

Un sistema de ecuaciones lineales de orden 3x3 es de la forma:

$$\begin{cases} 1) \quad a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ 2) \quad a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ 3) \quad a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales de orden 3x3, puede utilizarse la técnica de reducción para eliminar una variable elegida de las ecuaciones 1) y 2), la misma variable de 2) y 3) o 1) y 3).

El procedimiento anterior, generara dos ecuaciones con dos variables y, para resolverlo, se puede utilizar cualquiera de las técnicas estudiadas anteriormente Los valores obtenidos los reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones originales y hallamos el valor de la tercera variable.

Ejemplo 1

$$1) \quad 3x-5y+z=4$$
$$2) \quad 2x-y+3z=1$$
$$3) \quad x-2y-z=-3$$

De las ecuaciones 1) y 2), y 2) y 3), al eliminar la variable z, obtenemos las ecuaciones 4) y 5).

$$\begin{cases} 1) \quad 3x-5y+z=4 \quad \bullet(-3) \\ 2) \quad 2x-y+3z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x+15y-3z=-12 \\ \quad 2x-y+3z=1 \end{cases} \Rightarrow \quad 4) \quad -7x+14y=-11$$

$$\begin{cases} 2) \quad 2x-y+3z=1 \\ 3) \quad x-2y-z=-3 \quad \bullet(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ 3x-6y-3z=-9 \end{cases} \Rightarrow \quad 5) \quad 5x-7y=-8$$

Formemos un sistema con las ecuaciones 4) y 5), y determinemos los valores de x e y.

$$\begin{cases} 4) \quad -7x+14y=-11 \\ 5) \quad 5x-7y=-8 \quad \bullet(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7x+14y=-11 \\ 10x-14y=-16 \end{cases} \Rightarrow \quad 3x=-27 \quad \Rightarrow \quad x=-9$$

El valor de x lo reemplazamos en la ecuación 4) o 5) y hallamos $y=-\dfrac{37}{7}$

Por último, los valores de x e y los sustituimos en las ecuaciones 1) o 2) o 3) y obtenemos $z=\dfrac{32}{7}$

Para resolver el sistema de 3x3, también se puede utilizar el método de Cramer.

MÉTODO DE CRAMER

El método de Cramer permite resolver sistemas con el mismo número de incógnitas y ecuaciones. Consideremos el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}$$

Sea A la matriz de los coeficientes del sistema, y el determinante de A diferente de cero, denotado por det A 0.

Llamaremos matriz asociada a la incógnita x_i y la designaremos mediante A_i a la matriz que se obtiene al sustituir en la matriz A, la columna i por la matriz columna de los términos independientes, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

El valor de las incógnitas se obtiene a partir de:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

El sistema de ecuaciones de orden *nxn* se lo puede escribir en la forma $Ax = b$. Si el det $A \neq 0$, el sistema $Ax = b$, tiene una solución única.

Ejemplo 2

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ -x - y - z = -2 \\ 3x \qquad + 2z = -2 \end{cases}$$

Sea Δ, el determinante de los coeficientes de las variables del sistema:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -4 - 1 - 3 = -8$$

$\Delta = -8$.

Determínenos los valores de los determinantes Δ_x, Δ_y, y Δ_z:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 2 = 10$$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -12 + 1 - 8 = -19$$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 8 - 3 = -7$$

Finalmente, los valores de *x, y* y *z* determinamos de la siguiente manera:

$$x = \frac{x}{\Delta} = \frac{10}{-8} = -\frac{5}{4}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-19}{-8} = \frac{19}{8}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$$

El sistema de ecuaciones tiene por solución: $(x, y, z) = \left(-\frac{5}{4}, \frac{19}{8}, \frac{7}{8}\right)$

EJERCICIOS PROPUESTOS 4.2

Utilice cualquier técnica de las estudiadas para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $\begin{cases} 2(x-3) - \frac{y}{3} = 2x - 3 \\ -\frac{2}{3}(y - 3x) = -2(y-2) \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{2x \quad 3y}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{2}{3} \\ \frac{3y - 2x}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 2(y-3) = -2y \\ \frac{3x}{2} + \frac{y}{5} = -2(1 - 2x) \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{2x \quad y}{3} - \frac{x \quad y}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{3x - y}{4} - \frac{x - 3y}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{x + y}{3} + \frac{3x - y}{2} = \frac{7}{2} \\ \frac{x}{3} - \frac{3x - 5y}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 2(y-3) = -2y \\ \frac{3x}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{1}{3}(1 - 2x) \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x - 4y = \dfrac{1}{2}(y-2) \\ 4(y-1) = -\dfrac{3}{2}(x-3) \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{7}{x-y} = \dfrac{5}{8} \\ \dfrac{2}{x-y} - \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{3}{8} \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{2}{x+3y} + \dfrac{5}{x-y} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{-3}{x-y} + \dfrac{6}{x+3y} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{1}{3x+2y} + \dfrac{2}{3x-2y} = -2 \\ \dfrac{4}{3x-2y} - \dfrac{3}{3x+2y} = 3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{1}{2x+y} + \dfrac{2}{3x-y} = 2 \\ \dfrac{-1}{3x-y} + \dfrac{2}{2x+y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{4}{2x+5y} + \dfrac{3}{3x-y} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-2}{3x-y} + \dfrac{4}{2x+5y} = 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = -5 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3}{y^2} = -7 \\ \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = -1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x - y - z = 5 \\ x + 3y - z = 6 \end{cases}$

16. $\begin{cases} -2x + 3y + 4z = \dfrac{1}{2} \\ -3x + 5y - 7z = 3 \\ 5x - 3y + z = -2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x + 3y + 2z = -1 \\ 3x + 2y - 4z = 2 \\ 2x - 4y + 3z = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + y + 2z = -2a \\ x - y - z = 2 \\ x + 3y - z = -a \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 5 \\ -2x - y + 2z = b \\ x + y + z = -2b \end{cases}$

20. $\begin{cases} x + y + 2z = 2k \\ x - y - z = -3k \\ x + 3y - z = -k \end{cases}$

4.4. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática es una ecuación que tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con a diferente de cero, denominada ecuación canónica general, donde x representa la variable y a , b, c pertenecen a los números reales. Las raíces de una ecuación cuadrática están dadas por: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Sea $\Delta = b^2 - 4ac$ su discriminante:

Si $\Delta > 0$ entonces la ecuación tiene dos raíces reales y distintas.
Si $\Delta > 0$ entonces la ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas.
Si $\Delta = 0$ entonces la ecuación tiene dos raíces reales iguales.

Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ la dividimos para a, se obtiene $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Al sustituir $S = \frac{-b}{a}$ y $P = \frac{c}{a}$, nos queda $x^2 - Sx + P = 0$, donde S representa la suma y P el producto de las raíces de la ecuación cuadrática.

La representación gráfica de una ecuación cuadrática es una parábola. La intersección de esta gráfica con el eje x coincide con las soluciones de la ecuación. Pueden existir dos, una o ninguna intersección.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $\frac{12}{x^2 - x - 6} + \frac{13}{x+3} = \frac{104}{x^2 - 9}$

$$\frac{12}{(x-3)(x+2)} + \frac{13}{x+3} \quad \frac{104}{(x+3)(x-3)}$$

$$12(x+3) + 13(x-3)(x+2) = 104(x+2)$$

$$12(x+3) + 13(x^2 - x - 6) = 104(x+2)$$

$$12x + 36 + 13x^2 - 13x - 78 = 104x + 208$$

$$13x^2 - 13x + 12x - 104x + 36 - 78 - 208 = 0$$

$$13x^2 - 105x - 250 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 10)(13x + 25) = 0$$

$$x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 10$$

M C M: (x−3)(x+3)(x+2)

$$13x + 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{25}{13}$$

Por lo tanto, las soluciones son 10 y $-\frac{25}{13}$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $\frac{7}{x-1} - \frac{10}{x+2} = \frac{5}{x-3} - \frac{8}{x}$

$$\frac{7}{x-1} - \frac{10}{x+2} = \frac{5}{x-3} - \frac{8}{x}$$

$$7x(x+2)(x-3)-10x(x-1)(x-3)=5x(x+2)(x-1)-8(x+2)(x-3)(x-1)$$

$$7x(x^2-x-6)-10x(x^2-4x+3)=5x(x^2+x-2)-8(x+2)(x^2-4x+3)$$

$$7(x^3-x^2-6x)-10(x^3-4x^2+3x)=5(x^3+x^2-2x)-8(x^3-2x^2-5x+6)$$

$$7x^3-7x^2-42x-10x^3+40x^2-30x=5x^3+5x^2-10x-8x^3+16x^2+40x-48$$

$$12x^2-102x+48=0$$

$$2x^2-17x+8=0 \;\Rightarrow\; (2x-1)(x-8)=0$$

$$2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}$$

$$x-8=0 \;\Rightarrow\; x=8.$$

Por lo tanto, las soluciones son: $\frac{1}{2}$ y 8

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $3\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3}=2\sqrt{2x+6}$

$$\left(3\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3}\right)^2=\left(2\sqrt{2x+6}\right)^2$$

$$9(x+2)+6\sqrt{(x+2)(2x+3)}+2x+3=4(2x+6)$$

$$9x+18+6\sqrt{2x^2+7x+6}+2x+3=8x+24$$

$$6\sqrt{2x^2+7x+6}=8x-9x-2x+24-3-18$$

$$6\sqrt{2x^2+7x+6}=3-3x$$

$$2\sqrt{2x^2+7x+6}=1-x$$

$$\left(2\sqrt{2x^2+7x+6}\right)^2=(1-x)^2$$

$$4(2x^2+7x+6)=1-2x+x^2$$

$$x+1=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1, \quad 7x+23=0 \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{23}{7}$$

El valor $-\frac{23}{7}$ no satisface la ecuación original, y se puede comprobar que $x=-1$ es la única solución de la ecuación.

Ejemplo 4

Resolver la ecuación $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=3$

$$x+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{3} \;\Rightarrow\; x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{3} \;\Rightarrow\; x_1=-\frac{1}{2}+\sqrt{3} \quad \text{y} \quad x_2=-\frac{1}{2}-\sqrt{3}$$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación $2x^4+11x^2-51=0$.

La ecuación dada lo reescribimos como: $2(x^2)^2+11x^2-51=0$

Sustituyendo $x^2 = t$ obtenemos: $2t^2 + 11t - 51 = 0 \Longrightarrow (2t + 17)(t - 3) = 0$, de donde,

$$2t + 17 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{17}{2} \qquad \text{y} \qquad t - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3$$

Los valores de t losreemplazamos en $x^2 = t$ para hallar los valores de x; es decir:

Si $t = -\dfrac{17}{2}$, entonces $x^2 = -\dfrac{17}{2}$ una ecuación que no tiene solución real.

Y si $t = 3$, entonces $x^2 = 3$ cuya solución es $x = \pm\sqrt{3}$.

Por lo tanto, las soluciones reales de la ecuación son $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$.

Ejemplo 6

Un camino embaldosado será construido alrededor de un jardín de 28 x 46 metros.

Si el área del camino representa 50 % del área del jardín, encuentre el ancho del camino.

Solución:

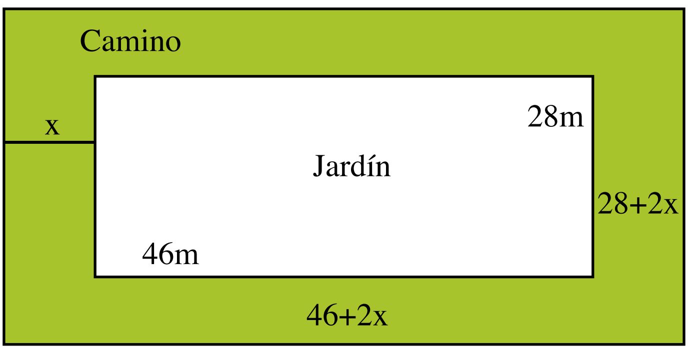


Figura 4.4. Representación gráfica de las condiciones del ejemplo 6

Área del jardín: 28 x 46 = 1288 m^2

Área del camino: $(46+2x)(28+2x)-1288 = \frac{1}{2}(1288)$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-37\pm\sqrt{(37)^2-4(1)(-161)}}{2} \Rightarrow x=\frac{-37\pm\sqrt{2013}}{2} \Rightarrow x=\frac{-37\pm 44{,}87}{2}$$

$$x_1=\frac{-37+44.87}{2}=3{,}935 \quad \text{y} \quad x_2=\frac{-37-44.87}{2}=-4{,}935$$

Por lo tanto, el ancho del camino es: 3, 935 m.

Ejemplo 7

Hallar el valor de la constante k en la ecuación $2x^2 - kx + 4 = 0$ para que su raíz sea − 2. Determine el valor de la otra raíz.

Solución:

El valor de la raíz debe satisfacer a la ecuación dada, es decir

$2(-2)^2 - k(-2) + 4 = 0 \Longrightarrow 8 + 2k + 4 = 0 \Longrightarrow k = -6$

La ecuación buscada es: $2x^2 + 6x + 4 = 0 \Longrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

De $x^2 + 3x + 2 = 0 \Longrightarrow (x+2)(x+1) = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = -1$

Ejemplo 8

Hallar el valor de la constante k en la ecuación $kx^2 - (k+4)x + 4 = 0$ para que tenga raíces iguales. Determine el valor de las raíces.

Solución:

Para que una ecuación tenga raíces iguales su discriminante $b^2 - 4ac$ debe ser igual a cero, es decir:

$$b^2 - 4ac = 0 \Longrightarrow \left[-(k+4)\right]^2 - 4(k)(4) = 0 \Longrightarrow k^2 + 8k + 16 - 16k = 0$$

$$k^2 - 8k + 16 = 0 \Longrightarrow (k-4)^2 = 0 \Longrightarrow k = 4$$

Por lo tanto, la ecuación buscada es: $4x^2 - 8x + 4 = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

De $x^2 - 2x + 1 = 0 \Longrightarrow (x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x = 1$

Ejemplo 9

Hallar la ecuación cuadrática cuya suma de raíces es -13 y su producto es 42.

Solución:

Como datos tenemos que $\dfrac{6x-10}{7}$ y $P = 42$; al reemplazar en $x^2 - Sx + P =$ 0 se obtiene $x^2 + 13x + 42 = 0$

EJERCICIOS PROPUESTOS 4.3

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

1. $(x+2)^2 + 7(x+2) + 10 = 0$
2. $(x+3)^2 + 3x - 8 = 0$
3. $x\,(x-1)^2 + 3(x-1)^3 = 0$
4. $x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0$
5. $x^{-4} - 8x^{-2} + 15 = 0$
6. $\dfrac{-5}{x^2+5x+6} + \dfrac{7}{x+3} = \dfrac{10}{x^2-4}$
7. $\dfrac{7(-2x-1)}{x^2+x-6} + \dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{-x-5}{x-2}$
8. $\dfrac{5}{x^2-1} - \dfrac{3}{x(x-1)} = \dfrac{2}{x^2}$

9. $\dfrac{2x+5}{x+5}+\dfrac{x}{x+3}=4$

10. $7+\dfrac{x-1}{x^2+3x}=\dfrac{x-5}{x}$

11. $2\sqrt{2x-3}=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-2}$

12. $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-7}+2=0$

13. $\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{9}{x^3}+8=0$

14. $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+7}=5$

15. $3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-7\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-20=0$

16. $\dfrac{3ab}{4}-\dfrac{ax}{2}-\dfrac{3x}{2}+x^2=0$

17. $\dfrac{28ax}{5}-\dfrac{63ab}{20}+\dfrac{45bx}{4}-20x^2=0$

18. $ax-\dfrac{3ab}{4}-3bx+4x^2=0$

19. Halle el valor de la constante k para que la ecuación $x^2+2kx-\frac{5}{4}=0$ tenga de raíz a $-\dfrac{1}{2}$. Determine la otra raíz.

20. Halle el valor de la constante k, para que una de las raíces sea $\dfrac{3}{2}$, en la ecuación $(k^2+3)x^2-3(k-2)x-5k=0$. Determine la otra raíz.

21. Calcula el valor de k para que la suma de las raíces sea 7, en la ecuación $2kx^2-(12k+1)x+12=0$

22. Hallar el valor de la constante k en la ecuación $kx^2-(k-5)x-5=0$ para que tenga raíces iguales. Determine el valor de las raíces.

23. Hallar el valor de la constante k en la ecuación $x^2+(2k+1)x+k=0$ para que tenga raíces reales distintas.

24. Hallar el valor de la constante k en la ecuación $x^2+2kx-\left(\frac{11}{4}k-\frac{3}{4}\right)=0$ para que tenga raíces imaginarias distintas.

4.5. Inecuaciones

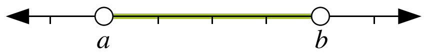
iNTERVALOS

Se denominaintervalo al conjunto de todos los reales que están entre a y b

Definición 4.2. Sean a y b números reales, los siguientes conjuntos se denomina intervalos con extremos a y b .

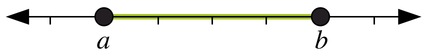
Intervalo abierto

$]a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b \}$



Intervalo cerrado

$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b \}$



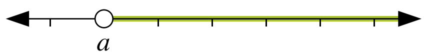
Intervalos semiabiertos

$]a, b\,] = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b \}$

$[a, b\,[= \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b \}$

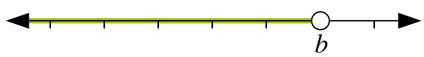
Si *a* y *b* son números reales cualesquiera, los intervalos infinitos se definen de la siguiente manera:

$]a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x > a \}$



$[a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq a \}$

$]-\infty, b[= \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x < b \}$



$]-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq b \}$

PROPIEDADES DE DESIGUALDADES

1. Si un mismo número se suma o se resta en ambos lados de una desigualdad, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original, es decir:

$$a < b \Longrightarrow a + c < b + c \text{ y } a - c < b - c$$

2. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o se dividen por el mismo número **positivo**, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original, es decir: $a < b \ \text{ y } \ c > 0 \ \Rightarrow \ ac < bc \ \text{ y } \ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

3. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o se dividen por el mismo número **negativo**, entonces la desigualdad resultante tendrá el sentido contrario de la original, es decir: $a<b \text{ y } c>0 \implies ac>bc \text{ y } \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

4. Cualquier lado de una desigualdad puede remplazarse por una expresión equivalente a ella, es decir: $a<b$ y $a=c \implies c<b$

5. Si ambos lados de una desigualdad son positivos y elevamos cada lado a la misma potencia positiva, entonces la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original, es decir:

$$0<a<b \text{ y } n>0 \Rightarrow a^n<b^n \text{ y } \sqrt[n]{a} \ \sqrt[n]{b},\ n\in\mathbb{Z}$$

6. Si los lados de una desigualdad son ambos positivos o negativos, entonces sus recíprocos respectivos estarán relacionados por un símbolo de desigualdad con sentido contrario a la desigualdad original, es decir: $0<a<b \Rightarrow 0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

4.5.1. Inecuaciones polinómicas

Las inecuaciones polinómicas son de la forma $P(x)>0$ o $Q(x)<0$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. Para hallar las soluciones de la inecuación, el primer paso es factorar; el segundo, hallar las raíces de los factores; y el tercero, hallar las soluciones ya sea utilizando un procedimiento simple, tablas de signos o el método de intervalos.

Ejemplo 1

Resolver la desigualdad $\frac{3}{2}(x-2)+1>-2(x-4)$

$$\frac{3}{2}(x-2)+1>-2(x-4) \Rightarrow 2\left[\frac{3}{2}(x-2)+1\right]>2\left[-2(x-4)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x-2)+2 \ -4(x-4) \Rightarrow 3x-4 \ -4x+16 \Rightarrow 7x \ 20 \Rightarrow x>\frac{20}{7}$$

La solución es $x\in\left]\frac{20}{7},+\infty\right[$

Ejemplo 2

Resolver la desigualdad $(x-3)(x-4)(2x+1)(1-3x)<0$.

igualamos a cero cada factor de la desigualdad, es decir:

$x\text{-}3=0 \Rightarrow x=3$ $\qquad$ $x\text{-}4=0 \Rightarrow x=4$

$2x+1=0 \;\Rightarrow\; x=-\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $1-3x=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{1}{3}$

A partir de las raíces de los factores de la desigualdad, construimos la tabla de signos (ver tabla 4.2). Y, para determinar los signos de los intervalos, cogemos puntos de prueba.

Factores	$-\infty$	$=-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	3	4 $\quad +\infty$
$2x+1$	-	-	+	+	+
$1-3x$	+	+	-	-	-
$x-3$	-	+	-	+	+
$x-4$	-	-	-	-	+
$(2x+1)(1-3x)(x-3)(x-4)$	-	-	-	+	-

Tabla 4.2. La tabla muestra los intervalos solución de la desigualdad, ejemplo 2

El conjunto solución de la inecuación es la unión de los intervalos asociados a las regiones pintadas.

$$x\in \left]-\infty\,,-\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{3},\ 3\right[\cup \left]4,+\infty\right[$$

Ejemplo 3

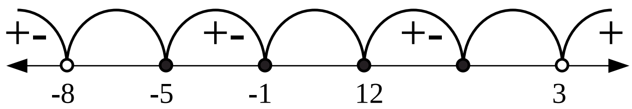
Resolver la desigualdad $(x^2-1)(x+5)(x-2)(x-3)(x+8)\geq 0$

Determinamos las raíces de la ecuación $(x^2-1)(x+5)(x-2)(x-3)(x+8)=0$,

y obtenemos: $r_1=-1$, $r_2=1$, $r_3=-5$, $r_4=2$, $r_5=3$, y $r_6=-8$, las mismas que representamos en la recta numérica.

Para determinar la solución de la inecuación, utilizamos el método de intervalos, que consiste en coger puntos de prueba en cada intervalo y reemplazar en los factores de la inecuación para determinar el signo resultante.

Tomando encuenta el signo de la desigualdad "$\geq$", la misma que nos indica que la solución es la unión de los intervalos positivos, determinamos la solución:



Por lo tanto, la solución es: $x \in]-\infty,-8[\,\cup\, [-5,-1] \,\cup\, [1, 2] \,\cup\,]3,+\infty[$.

4.5.2. Inecuaciones con valor absoluto

Definición 4.3. Sea x un número real cualquiera, el valor absoluto de x , que lo denotamos por $|x|$, está definido por: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Teorema 4.1. Sea x, y, a con $a > 0$ números reales cualesquiera, entonces:

1. $z = a \Leftrightarrow z = -a \vee z = a$

2. $|x\,y| = |x|\,|y|$

3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

4. $|x^n| = |x|^n$

5. $|z| > a \Leftrightarrow z < -a \vee z > a$

6. $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$

7. $|z| < a \Leftrightarrow -a < z < a$

8. $|x + y| \leq |x| + |y|$ Desigualdad triangular

Ejemplo 1

Resolver la desigualdad $\left|\dfrac{2x-5}{2-3x}\right| \geq 6$

Para resolver la desigualdad, aplicamos el numeral 5 del teorema 4.1, es decir:

$$\left|\frac{2x-5}{2-3x}\right| \geq 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-5}{2-3x} \leq -6 \quad \vee \quad \frac{2x-5}{2-3x} \geq 6$$

Debemos resolver las dos desigualdades y la solución de la desigualdad original es la unión de las dos soluciones.

1) $$\frac{2x-5}{2-3x} \leq -6$$

$$\frac{2x-5}{2-3x} + 6 \leq 0$$

$$\frac{-16x+7}{2-3x} \leq 0$$

$$-16x+7=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{7}{16}$$

$$2-3x=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2}{3}$$

2) $$\frac{2x-5}{2-3x} \geq 6$$

$$\frac{2x-5}{2-3x} - 6 \geq 0$$

$$\frac{20x-17}{2-3x} \geq 0$$

$$20x-17=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{17}{20}$$

$$2-3x=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2}{3}$$

A partir de las raíces de los factores de las desigualdades, construimos la tabla de signos (ver tabla 4.3 y 4.4). Y, para determinar los signos de los intervalos, cogemos puntos de prueba.,

	$-\infty$	$\frac{7}{16}$	$\frac{2}{3}$	∞
$-16x+7$	+	● -		-
$2-3x$	+	+	○	-
$\frac{-16\ \ +7}{2-3x}$	+	-		+

Tabla 4.3. La tabla muestra el intervalo solución, desigualdad 1

Sol. 1

-∞	$\frac{2}{3}$	$\frac{17}{20}$	∞
$20x-17$	-	-	+
$2-3x$	+	-	-
$\frac{20x-17}{2-3x}$	-	+	-

Tabla 4.4. La tabla muestra el intervalo solución, desigualdad 2

Sol. 2

$$\text{Sol. final} = \text{Sol.}1 \cup \text{Sol.}2 = \left[\frac{7}{16}, \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3}, \frac{17}{20}\right] = \left[\frac{7}{16}, \frac{17}{20}\right] - \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

Ejemplo 2

Resolver la desigualdad $|3x+5| + |2x-3| \leq 7$.

Para resolver la desigualdad, procedemos a determinar los intervalos en los cuales se va analizar la inecuación. Para ello, las expresiones de los valores absolutos las igualamos a cero, es decir:

$$3x+5=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{5}{3} \qquad \text{y} \qquad 2x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$

Con los valores hallados, construimos la tabla 4.5 para determinar los intervalos de análisis la desigualdad dada:

-∞	$-\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	∞
$3x+5$	-	+	+
$2x-3$	-	-	+

Tabla 4.5. La tabla muestra los intervalos de análisis de la desigualdad del ejemplo 5

1 Si $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{3}\right[$ la desigualdad $|3x+5| + |2x-3| \leq 7$ se transforma en: $-3x-5-2x+3 \leq 7 \Rightarrow -5x-2 \leq 7 \Rightarrow -5x \leq 9\ (-1) \Rightarrow 5x \geq -9 \Rightarrow x \geq -\frac{9}{5}$

Es decir $x \in \left]-\frac{9}{5}, \infty\right[$

La solución de 1 es: $\left]-\infty, -\frac{5}{3}\right[\cap \left]-\frac{9}{5}, \infty\right[= \left]-\frac{9}{5}, -\frac{5}{3}\right[$

2 $x \in \left]-\frac{9}{5}, -\frac{5}{3}\right[$ la desigualdad $|3x+5| + |2x-3| \leq 7$ se transforma en: $3x+5-2x+3 \leq 7 \Rightarrow x+8 \leq 7 \Rightarrow x \leq -1$ es decir $x \in]-\infty,-1]$

La solución de 2 es: $\left]-\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}\right[\cap]-\infty, -1[= \left]-\frac{5}{3}, -1\right[$

3 $x \in \left]\frac{3}{2}, \infty\right[$ la desigualdad $|3x+5| + |2x-3| \leq 7$ se transforma en: $3x+5+2x-3 \leq 7 \Rightarrow 5x+2 \leq 7 \Rightarrow 5x \leq 5 \Rightarrow x \leq 1$ es decir $x \in]-\infty,-1]$

La solución de 3 es la intersección entre $\left]\frac{3}{2}, \infty\right[$ y $]-\infty,1]$; es decir, vacío.

La solución final es la unión de las tres soluciones:

$$x \in \left[-\frac{9}{5}, -\frac{5}{3}\right[\cup \left[-\frac{5}{3}, -1\right] \cup \phi = \left[-\frac{9}{5}, -1\right]$$

Ejemplo 3

Resolver la desigualdad $|2x-1+|x+1|| < 5$.

Por el teorema 4.1, numeral 7, tenemos que:

$$-5 < 2x-1+|x+1| \ 5$$

La cual la interpretamos de la siguiente forma:

1 $2x-1+x+1 > -5$ y 2 $2x-1+|x+1| < 5$

$|x+1| \ -4-2x$ $\qquad$ $x+1 \ 6-2x$

Por el teorema de **desigualdades e igualdades con valor absoluto** numeral 2:

1.1 $x+1<4+2x$	$x+1>-4-2x$	si y solo si $-4-2x>0$ **condición**
$-x<3$	$3x>-5$	$-2x>4$
$x>-3$	$x>-\frac{5}{3}$	$x<-2$
$x\in\,]-3,+\infty[$	$x\in \left]-\frac{5}{3},+\infty\right[$	$x\in]-\infty,-2[$

La solución 1.1 es la unión de las soluciones: $]-3,+\infty[$ y $\left]-\frac{5}{3},+\infty\right[$ dándonos como resultado el intervalo: $]-3,+\infty[$.

La solución de la inecuación ① es la intersección entre la solución 1.1 y el intervalo $]-\infty\;,-2[$ solución de la condición, obteniendo el intervalo $]-3,-2[$.

Para la solución de ②, resolvemos $|x+1|<6-2x$, aplicando el teorema 4.1:

$-6+2x<x+x<6-2x$ si y solo si $6-2x>0$ **condición**

Procedemos de la siguiente manera:

2.1 $x+1>-6+2x$ y	$x+1<6-2x$	si y solo si $6-2x>0$ "condición"
$-x>-7$	$3x<5$	$-2x\quad-6$
$x<7$	$x<\frac{5}{3}$	$x\quad 3$
$x\in]-\infty\;,7[$	$x\in \left]-\infty,\frac{5}{3}\right[$	$x\in]-\infty\;,3[$

La solución 2.1 es la intersección de las soluciones: $]-\infty,7[$ y $\left]-\infty,\frac{5}{3}\right[$

dándonos como resultado el intervalo: $\left]-\infty,\frac{5}{3}\right[$

La solución de la inecuación ② es la intersección entre la solución 2.1 y el intervalo $]-\infty\;,3[$ solución de la condición, dándonos el intervalo $\left]-\infty,\frac{5}{3}\right[$

La solución final es la intersección de la solución ① y ②, es decir

$$x\in \left]-\infty,\frac{5}{3}\right[\cap\,]-3,-2[\,=\,]-3,-2[$$

4.5.3. Inecuaciones fraccionarias

Una inecuación fraccionaria en una incógnita tiene la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ o $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ con $Q(x) \neq 0$ y $P(x)$, $Q(x)$ polinomios diferentes de cero.

Al resolver una inecuación fraccionaria se debe considerar que las inecuaciones $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ o $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ son equivalentes a las inecuaciones:

$$P(x)Q(x) > 0 \quad \text{y} \quad P(x)Q(x) < 0$$

Si $Q(x) \neq 0 \Rightarrow Q^2(x) > 0$, de donde tenemos que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{P(x)Q^2(x)}{Q(x)} > (0)Q^2(x) \quad \Rightarrow \quad P(x)Q(x) > 0$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{P(x)Q^2(x)}{Q(x)} < (0)Q^2(x) \quad \Rightarrow \quad P(x)Q(x) < 0$$

Ejemplo 1

Hallar la solución de la inecuación $\frac{(x^2-1)(x+5)(x-2)}{(x-3)(x+8)} \geq 0$

La inecuación $\frac{(x^2-1)(x+5)(x-2)}{(x-3)(x+8)} \geq 0$ es equivalente a:

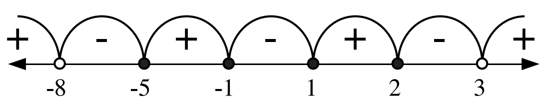
$$(x^2-1)(x+5)(x-2)(x-3)(x+8) \geq 0, \ x \neq -8 \text{ y } 3$$

Determinamos las raíces de la ecuación $(x^2-1)(x+5)(x-2)(x-3)(x+8) = 0$, obteniendo: $x = -8$, $x = -5$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$

Las raíces las representamos en la recta numérica y utilizando el método de los intervalos determinamos la solución de la inecuación.

Para la solución de la inecuación, consideramos el signo de la desigualdad $\geq$, el mismo que nos indica que la solución es la unión de los intervalos positivos.

Además, tomamos en cuenta las raíces de los factores del numerador en los cuales los intervalos son cerrados, y de los factores del denominador en los cuales los intervalos son abiertos en general.



Por lo tanto, la solución es: $x \in \left]-\infty,-8\right[\cup \left[-5,-1\right] \cup \left[1, 2\right] \cup \left]3,+\infty\right[$

Ejemplo 2

Hallar la solución de la inecuación $\dfrac{x-5}{x-1} \leq \dfrac{x+2}{x+3}$

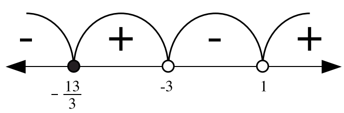
De $\dfrac{x-5}{x-1} \leq \dfrac{x+2}{x+3} \Rightarrow \dfrac{x-5}{x-1} - \dfrac{x+2}{x+3} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{(x-5)(x+3)-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-3x-13}{(x-1)(x+3)} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{3x+13}{(x-1)(x+3)} \geq 0$ que es equivalente a:

$$(3x+13)(x-1)(x+3) \geq 0 \text{ con } x \neq -3 \text{ y } 1$$

Determinamos las raíces de la ecuación $(3x+13)(x-1)(x+3) = 0$ y obtenemos: $x = -\dfrac{13}{3},\ x = -3,\ x = 1$ .Las raices representamos en la recta numérica y utilizamos el método de los intervalos para determinar la solución de la inecuación.

Para la solución de la inecuación, consideramos el signo de la desigualdad equivalente >, que nos indica que la solución es la unión de los intervalos positivos. Además, tomamos en cuenta las raíces de los factores del numerador en los cuales los intervalos son cerrados, y de los factores del denominador en los cuales los intervalos son abiertos.



Por lo tanto, la solución es: $x \in \left[-\dfrac{13}{3},-3\right[\cup \left]1,+\infty\right[$

Ejemplo 3

Hallar la solución de la inecuación $\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x-2} \leq \dfrac{2x-1}{x-1}$

De $\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x-2} \leq \dfrac{2x-1}{x-1} \Rightarrow \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x-2} - \dfrac{2x-1}{x-1} \leq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2(x-2)+x^2(x-1)-x(2x-1)(x-2)}{x(x-2)(x-1)} \leq 0 \;\Rightarrow\; \frac{3x-2}{x(x-2)(x-1)} \leq 0$$

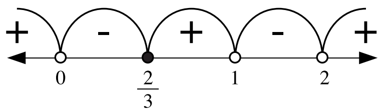
La inecuación es equivalente a $x\,(3x-2)(x-2)(x-1) \leq 0$ con $x \neq 0$, 1 y 2.

Resolvemos $x(3x-2)(x-2)(x-1) = 0$ obteniendo: $x=0,\ x=\frac{2}{3},\ x=1\ y\ x=2$

Las raíces las representamos en la recta numérica y utilizamos el método de los intervalos para determinar la solución de la inecuación.

Para la solución de la inecuación, consideramos el signo de la desigualdad equivalente $\leq$, que indica que la solución es la unión de los intervalos negativos.

Además, debemos tener en cuenta que, en las raíces de los factores del numerador, los intervalos son cerrados, y en los del denominador son abiertos



Por lo tanto, la solución es: $x \in \left]0, \frac{2}{3}\right] \cup \,]1,2[$

Ejemplo 4

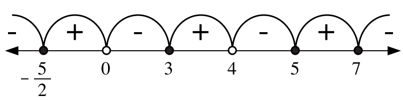
Resolver la desigualdad $\dfrac{(2x^2-x-15)(5-x)(7-x)}{4x-x^2} \geq 0$

Antes de igualar a cero cada uno de los factores, procedemos a factorar:

$$\frac{(2x^2-x-15)(5-x)(7-x)}{4x-x^2} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(2x+5)(x-3)(5-x)(7-x)}{x\,(4-x)} \geq 0$$

La inecuación es equivalente a $x(2x+5)(x-3)(5-x)(7-x)(4-x) \geq 0$ con $x \neq 0$ y 4 Resolvemos $x(2x+5)(x-3)(5-x)(7-x)(4-x) = 0$ cuyas raíces son:

$$x=0,\ x=-\frac{5}{2},\ x=3,\ x=4,\ x=5\ y\ x=7$$



Por lo tanto, la solución es: $x \in \left[-\frac{5}{2}, 0\right[\cup [3,4[\cup\ 5,7$

4.5.4. Inecuaciones irracionales

Una inecuación irracional en una variable es de la forma:

$f(x,\sqrt{p_1(x)},\sqrt{p_2(x)},...,\sqrt{p_n(x)}) > 0$ o $f(x,\sqrt{p_1(x)},\sqrt{p_2(x)},...,\sqrt{p_n(x)}) < 0$,

donde $p_1(x), p_2(x),..., p_n(x)$ son polinomios diferentes de cero.

Para determinar el conjunto sobre el cual se resuelve la inecuación, se debe hallar la intersección de las soluciones de los $p_i(x) \geq 0$, $i = 1,2,...n$.

La solución de la inecuación irracional será la intersección entre la solución de la inecuación y el conjunto sobre el cual se resuelve.

Para la resolución de las inecuaciones irracionales, se debe tener encuenta las siguientes propiedades:

1) $0 \leq x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.

2) $\forall p(x) \geq 0: \sqrt[n]{p(x)} \geq 0 \Leftrightarrow p(x) \geq 0$, n un entero positivo.

3) $\sqrt[n]{p(x)} < 0 \Leftrightarrow p(x) < 0$, n un entero positivo impar.

4) $\sqrt[n]{p(x)} = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$, n un entero positivo.

5) $\sqrt[n]{p(x)} \leq \sqrt[n]{q(x)} \Leftrightarrow 0 \leq p(x) \leq q(x)$, n un entero positivo.

Ejemplo 1

Hallar la solución de la inecuación $\sqrt{5x-1} < 2$

Para la solución consideramos:

1) $5x-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad x \in \left[\frac{1}{5}, -\infty\right[$

2) $\sqrt{5x-1} < 2 \Rightarrow 5x-1 < 4 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in]-\infty,1[$

La solución de la inecuación irracional es la intersección

$$\left[\frac{1}{5},+\infty\right[\cap \;]-\infty,1[\; = \left[\frac{1}{5},1\right[$$

Por lo tanto, la solución final es: $x \in \left[\frac{1}{5}, 1\right[$

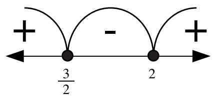
Ejemplo 2

Hallar la solución de la inecuación $\sqrt{2x^2 - 7x + 6} \leq \sqrt{10}$

Para la solución consideramos:

1) $2x^2 - 7x + 6 \geq 0 \Rightarrow (2x - 3)(x - 2) \geq 0$

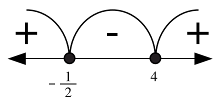
Las raíces son $x = \frac{3}{2}$ y $x = 2$, las mismas que representamos en la recta numérica y con el método de intervalos, hallamos la solución de la inecuación 1.



Solucion 1: $x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup [2, +\infty[$

2) $\sqrt{2x^2 - 7x + 6} \leq \sqrt{10} \Rightarrow 2x^2 - 7x + 6 \leq 10 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 \leq 0 \Rightarrow (2x + 1)(x - 4) \leq 0$

Las raíces son $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 4$, las mismas que representamos en la recta numérica y, con el método de intervalos, hallamos la solución de la inecuación 2.



Solucion 2: $x \in \left[-\frac{1}{2}, 4\right]$

La solución de la inecuación irracional es la intersección de las soluciones 1 y 2:

$\left\{\left]-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup [2, +\infty[\right\} \cap \left[-\frac{1}{2}, 4\right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \cup [2, 4]$. Es decir $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \cup [2, 4]$

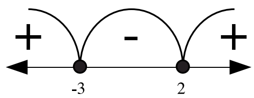
Ejemplo 3

Hallar la solución de la inecuación $\sqrt{x^2 + x - 6} \leq \sqrt{2x^2 - 13x + 15}$

Para la solución consideramos:

1) $x^2 + x - 6 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) \geq 0$

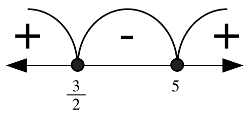
Las raíces son $x = -3$ y $x = 2$; las mismas los representamos en la recta numérica y, con el método de intervalos, hallamos la solución de la inecuación 1.



Solucion 1: $x \in \left]-\infty, -3\right] \cup \left[2, +\infty\right[$

2) $2x^2 - 13x + 15 \Rightarrow (2x - 3)(x - 5) \geq 0$

Las raíces son $x = \frac{3}{2}$ y $x = 5$, las mismas representamos en la recta numérica y con el método de intervalos hallamos la solución de la inecuación 2.

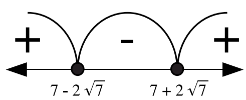


Solucion 2: $x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[5, +\infty\right[$

3) $\sqrt{x^2 + x - 6} \leq \sqrt{2x^2 - 13x + 15} \Rightarrow x^2 + x - 6 \leq 2x^2 - 13x + 15 \Rightarrow x^2 - 14x + 21 \geq 0$

$x^2 - 14x + 21 \geq 0 \Rightarrow (x - 2\sqrt{7} - 7)(x + 2\sqrt{7} - 7) \geq 0$

Las raíces son $x = -2\sqrt{7} + 7$ y $x = 2\sqrt{7} + 7$, las mismas que representamos en la recta numérica y, con el método de intervalos, hallamos la solución de la inecuación 3.



Solucion 3: $x \in \left]-\infty, 7-2\sqrt{7}\right] \cup \left[7+2\sqrt{7}, +\infty\right[$

La solución de la inecuación irracional es la intersección de las soluciones 1, 2 y 3:

$$\left\{\left]-\infty,-3\right] \cup \left[2,+\infty\right[\right\} \cap \left\{\left]-\infty,\frac{3}{2}\right] \cup \left[5,+\infty\right[\right\} \cap \left\{\left]-\infty, 7-2\sqrt{7}\right] \cup \left[7+2\sqrt{7},+\infty\right[\right\} =$$

$\left]-\infty,-3\right] \cup \left[7+2\sqrt{7},+\infty\right[$. Por lo tanto: $x \in \left]-\infty,-3\right] \cup \left[7+2\sqrt{7},+\infty\right[$

EJERCICIOS PROPUESTOS 4.4

Resolver las siguientes inecuaciones.

1) $\dfrac{(4x^2-12x+9)(x^2-49)}{x^2+5x+6} < 0$

2) $\dfrac{(x^2+6x+9)(x^2-25)}{x^2-2x-15} \geq 10$

3) $\dfrac{(3x^2+8x-3)(x^2-25)}{1-x^2} > 0$

4) $\dfrac{(2x^2-x-6)(x^2-2)}{4-x^2} > 0$

5) $\dfrac{2x-1}{x+1} - \dfrac{3x+5}{x-1} > \dfrac{1}{12}$

6) $\dfrac{x+3}{x-5} + \dfrac{2x-7}{x+2} < 2$

7) $\dfrac{(x^2-9)(4x^2-5)}{2x^2-11x+15} > 0$

8) $\dfrac{2x^3-19x^2+27x+90}{12x^2-19x+5} \geq 0$

9) $\dfrac{(9x^2+24x+16)(x^2-4)}{x^2-5x+6} < 0$

10) $\dfrac{8x^3-18x^2-11x+30}{3x^2-7x-20} > 0$

11) $\dfrac{6x^3+13x^2-9x-10}{12x^3-65x^2+23x+10}>0$

12) $\dfrac{3x+5}{2x+1}-\dfrac{x+15}{x-1}>\dfrac{1}{3}$

13) $\left|\dfrac{x+4}{2x-5}-\dfrac{3}{4}\right|<\dfrac{5}{7}$

14) $\left|\dfrac{x}{3x-2}-\dfrac{1}{x}\right|<5$

15) $\left|\dfrac{-x}{x^2-4}-\dfrac{1}{4}\right|>\dfrac{1}{8}$

16) $\left|\dfrac{x^2-5}{6}-\dfrac{1}{3}\right|>\dfrac{1}{9}$

17) $\left|\dfrac{2x+3}{x-5}-\dfrac{2x}{3}\right|>2$

18) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}+x\right|<|-2x|$

19) $\left|\dfrac{x+2}{x+1}+x+1\right|>|3x|$

20) $\left|x+\dfrac{x+3}{3x-2}+3\right|\leq|x|$

21) $\left|\dfrac{x+2}{3x+1}\right|+|x+1|>2$

22) $|x^2-4|+|3x+5|>5$

23) $|x-3|+|x-4|-|x-6|<1$

24) $\big||x-3|+|x-4|\big|<1$

25) $|2x-5|+|7x-8|-|x+9|>11$

26) $\big||3x-2|+|x-7|-9\big|>15$

27) $\sqrt{x}-5+\sqrt{2x}-6+3<0$

28) $\sqrt{x^2-7x+12}\geq 4$

29) $\sqrt{x^2+x-6}\geq\sqrt{2x^2-13x+15}$

30) $\sqrt{x^2-x-6}<6$

4.6. Sistema de inecuaciones

La solución de un sistema de inecuaciones consta de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen de manera simultánea todas las inecuaciones dadas.

En forma geométrica, es la región común para todas las regiones determinadas por las inecuaciones dadas.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 2x + y > 3 \\ x \geq y \\ 2y - 1 > 0 \end{cases}$$

Las inecuaciones del sistema los transformamos a ecuaciones para construir las gráficas correspondientes.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x = y \\ 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Luego, procedemos a graficar las ecuaciones en el plano cartesiano, las mismas que dividen al plano en dos semiplanos. Para determinar el semiplano que satisface la condición de la desigualdad, se toma un punto de prueba para su respectivo análisis y determinación de la región que cumple la condición. La región que cumple con las condiciones, en el problema dado, se representa en la figura 4.5.

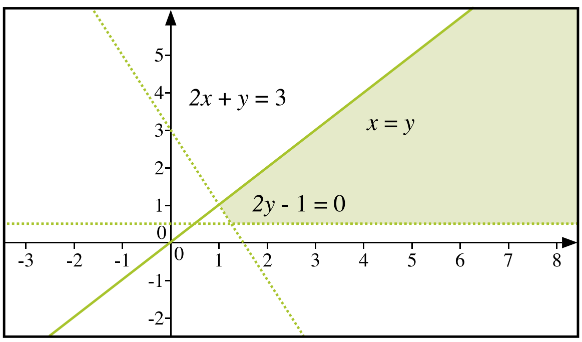


Figura 4.5. Región pintada que cumple con las condiciones del sistema de inecuaciones

Ejemplo 2

$$\begin{cases} 2x - y < 4 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Las inecuaciones del sistema las transformamos en ecuaciones para construir las gráficas correspondientes:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 4 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, una vez realizadas las gráficas, se debe determinar el semiplano que satisface la condición de la desigualdad para obtener la región que muestra la figura 4.6.

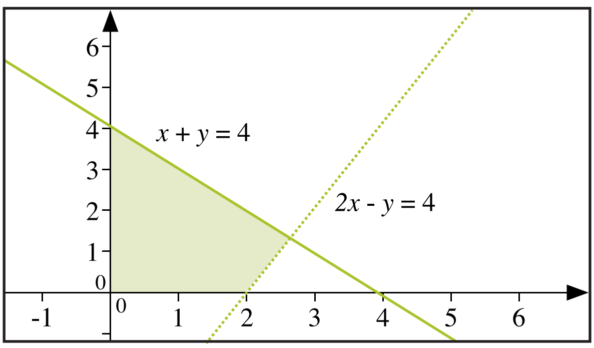


Figura 4.6. Región pintada que cumple con las condiciones del sistema de inecuaciones

Ejemplo 3

$$\begin{cases} y \geq x^2 - 4x + 3 \\ x^2 + 5y^2 - 4x - 10y \leq -4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Las inecuaciones del sistema los transformamos en ecuaciones para construir las gráficas correspondientes:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ x^2 + 5y^2 - 4x - 10y = -4 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Construimos las gráficas y determinamos la región que satisface la condición de la desigualdad (ver figura 4.7).

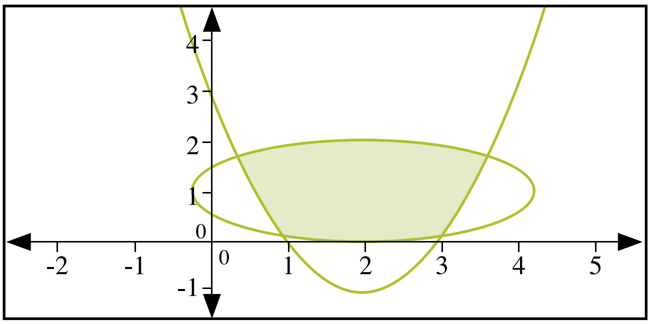


Figura 4.7. Región pintada que cumple con las condiciones del sistema de inecuaciones

EJERCICIOS PROPUESTOS 4.5

Construir la gráfica de los sistemas de inecuaciones propuestos

1. $\begin{cases} x + y \le 4 \\ 2x - y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 4y \ge 12 \\ x - 2y \le 2 \\ x \ge 9 \\ y \le 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y \le 8 \\ 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 3y \ge 6 \\ 0 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x-3y \boxtimes -2 \\ y \geq x-5 \\ 2x+5y \geq 10 \\ y \leq -x+9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-3y \geq -5 \\ y \geq x-2 \\ 2x+5y \geq 3 \\ y \leq -x+3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x+3y \geq 2 \\ 3x+y \geq 4 \\ -x+3y \leq 12 \\ 3x+y \leq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} -x+3y \leq 8 \\ 3x+y \geq 8 \\ 3x+y \leq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+5y \geq 7 \\ x+5y \leq 12 \\ 2x-4y \leq 9 \\ 12x-5y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} y \geq x^2-2x \\ 3x+5y \leq 24 \\ 2x-y \geq -2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} -x+3y \leq 8 \\ 3x+y \geq 8 \\ 3x+y \leq 14 \\ y \geq 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} y \geq x^2-2x \\ 3x+5y \leq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} y \geq x^2-6x+6 \\ y^2+x \geq -2y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2 \leq 16 \\ y \leq x^2-6x+5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -y^2+2y+x\geq -2 \\ 4x+7y\leq 28 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} y\geq x^2-4x+5 \\ y\leq -2x^2+8x-3 \end{cases}$

4.7. Programación lineal

En todo problema de programación lineal, el objetivo es maximizar o minimizar una función conocida como "función objetivo" sujeta a algunas "restricciones". Por ejemplo, un fabricante puede querer minimizar costos, pero está limitado por restricciones que deben satisfacer la demanda del producto y por las restricciones que limitan la capacidad de producción; una empresa puede querer maximizar su utilidad, pero está sujeta a las restricciones de producción que imponen las limitaciones sobre el uso de determinada materia prima, etc.

Si consideramos resolver tales problemas cuando la función que se va a maximizar o minimizar es de la forma: $z = ax + by$, con a y b son constantes y sujeto a restricciones representadas por un sistema de desigualdades lineales con todas las variables no negativas, estamos frente a un problema de programacion lineal.

Al conjunto de soluciones del sistema de desigualdades, se le conoce como **región factible R**. Y el valor de la función objetivo **z**, que puede representar costo, utilidad, pérdida o recursos físicos, se halla a partir de uno de los puntos de la región factible **R**, que maximice o minimice la función.

En programación lineal, hay métodos que facilitan la localización de estos puntos. Entre estos tenemos el método de solución gráfica en el que se puede demostrar que el valor máximo o mínimo se encuentra en un vértice de la región factible **R**.

Si la línea de la función objetivo óptima coincide con uno de los lados de la región factible, entonces existen soluciones óptimas alternativas en las que más de una solución proporciona el valor óptimo para la función objetivo. En general, un problema de programación lineal con soluciones óptimas alternativas es una buena solución, para el encargado de la toma de decisiones en la empresa, ya que puede seleccionar varias combinaciones de las variables de decisión que optimicen el problema.

Para la resolución de los problemas utilizaremos GeoGebra un *software* matemático interactivo libre. GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo, así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

Ejemplo 1

Dada la función objetivo z sujeta a las restricciones expuestas, hallar los valores que maximicen la función.

Función objetivo: $z = 15x + 25y$

Restricciones: $\begin{cases} 1)\ \ x + 2y \leq 10 \\ 2)\ \ x + 0{,}75y \leq 5 \\ 3)\ \ x \geq 0 \\ 4)\ \ y \geq 0 \end{cases}$

El primer paso, es representar las restricciones en el plano cartesiano para determinar la región factible, para ello utilizamos GeoGebra (ver figura 4.8):

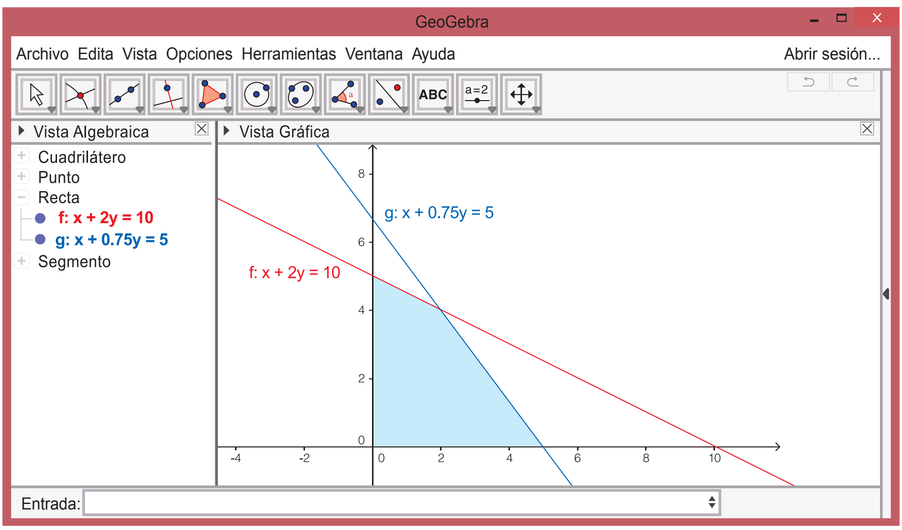


Figura 4.8. Representación de la región factible sujeta a las restricciones de ejemplo 1

El segundo paso es determinar los valores de los vértices de la región factible (ver figura 4.9):

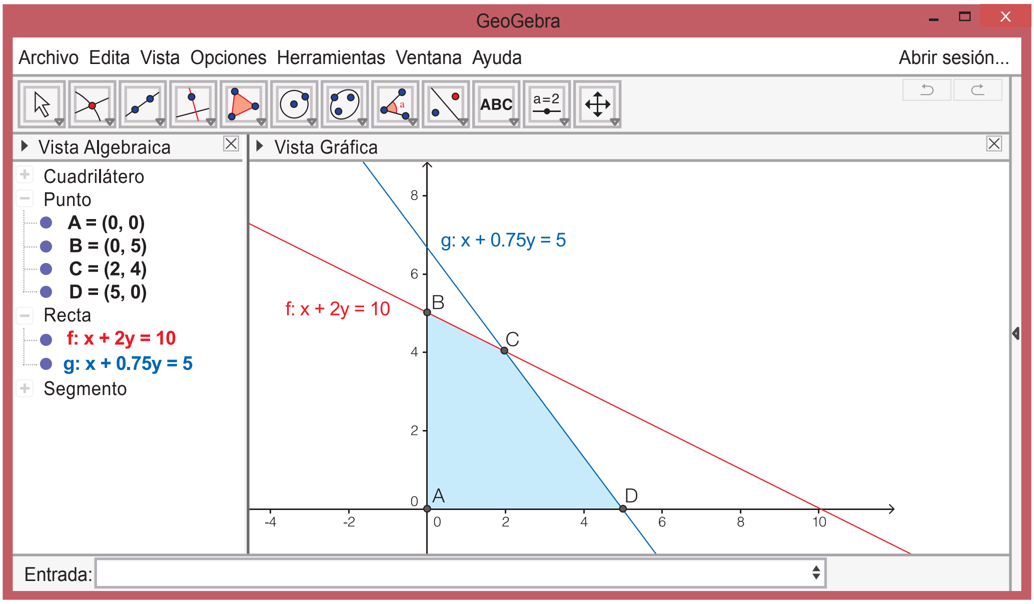


Figura 4.9. Determinación de los vértices de la región factible de ejemplo 1

Como se puede ver en la figura 4.9, el *software* nos permite hallar los vértices de la región factible.

Para el caso algebraico, a partir de la figura bien construida, se pueden determinar las coordenadas de los vértices: $A(0,0)$; $B\ (0,5)$ y $D\ (5,0)$.

Para hallar las coordenadas de C debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} 1)\ \ x + 2y = 10 \\ 2)\ \ x + 0.75y = 5 \end{cases}$$

por cualquiera de las técnicas vistas y obtendremos que $C\ (2,4)$.

El tercer paso, hallar $z = 15x + 25y$ en cada uno de los vértices de la región factible:

$A(0,0) \Rightarrow z = 15(0) + 25(0) \Rightarrow z = 0$

$B(0,\ 5) \Rightarrow z = 15(0) + 25(5) \Rightarrow z = 125$

$C(2, 4) \Rightarrow z = 15(2) + 25(4) \Rightarrow z = 130$

$D(5, 0) \Rightarrow z = 15(5) + 25(0) \Rightarrow z = 75$

En conclusión, los valores que maximizan la función objetivo son $x = 2$ y $y = 4$

Ejemplo 2

Dada la función objetivo z sujeta a las restricciones expuestas, hallar los valores que minimicen la función.

Función objetivo: $z = 4x + 4y$

$$\text{Restricciones: } \begin{cases} 1)\ \ 2x + 2y \geq 9 \\ 2)\ \ 2x + 3y \geq 10 \\ 3)\ \ x \geq 0 \\ 4)\ \ y \geq 0 \end{cases}$$

El primer paso es representar las restricciones en el plano cartesiano para determinar la región factible, para ello utilizamos GeoGebra (ver figura 4.10):

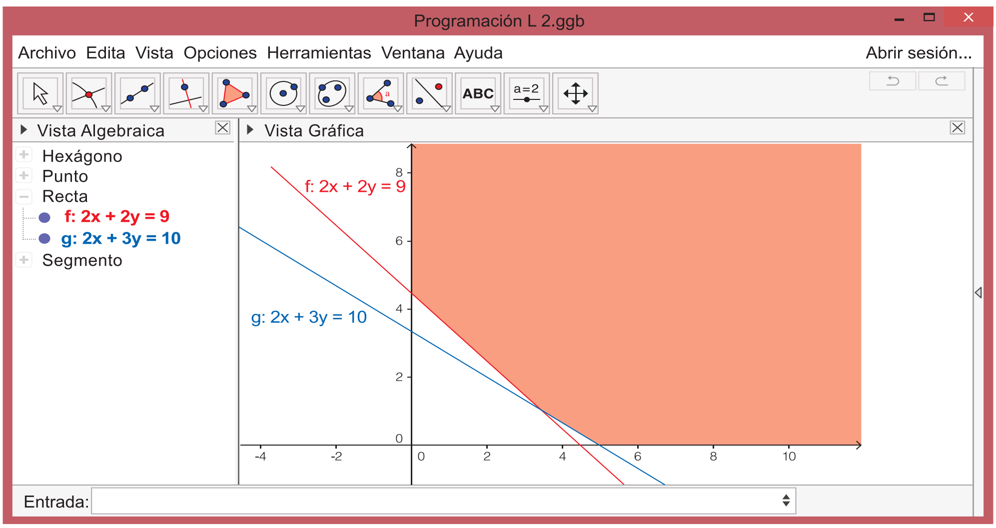


Figura 4.10. Representación de la región factible sujeta a las restricciones de ejemplo 2

El segundo paso es determinar los valores de los vértices de la región factible (ver figura 4.11):

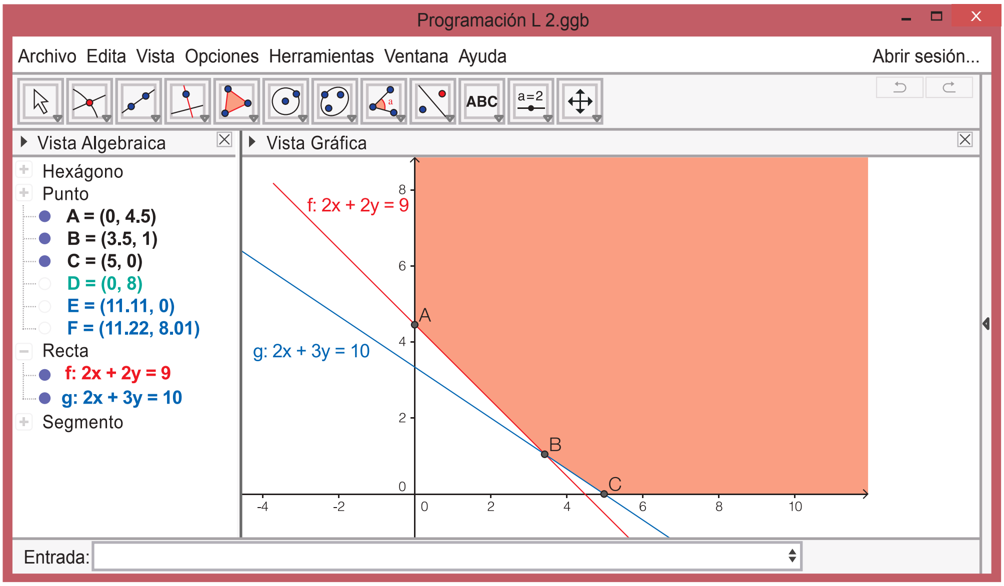


Figura 4.11. Determinación de los vértices de la región factible de ejemplo 2

Como se puede ver en la figura 4.11, el *software* nos permite hallar los vértices de la región factible. Para el caso algebraico, a partir de la figura bien construida se puede determinar las coordenadas de los vértices: $A(0{,}4.5)$ y $C(5{,}0)$.

Para hallar las coordenadas de B debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} 1)\ \ 2x+2y=9 \\ 2)\ \ 2x+3y=10 \end{cases}$$

por cualquiera de las técnicas vistas y obtendremos que $B(3.5{,}1)$

El tercer paso es hallar los valores de $z = 4x + 4y$ en cada uno de los vértices de la región factible:

$A(0{,}4.5) \Rightarrow z = 4(0) + 4(4.5) \Rightarrow \text{z} = 18$

$B(3.5,\ 1) \Rightarrow z = 4(3.5) + 4(1) \Rightarrow \text{z} = 18$

$C(0,\ 5) \Rightarrow z = 4(0) + 4(5) \Rightarrow \text{z} = 20$

Como podemos ver, aparentemente hay dos puntos que minimiza la función objetivo, pero en realidad son todos los puntos del segmento AB, es decir, puede seleccionarse varias combinaciones de las variables de decisión que optimicen el problema; esto sucedió porque la recta que representa la función objetiva al ser desplazada para hallar un punto que minimice el problema se encontró con dos puntos *A* y *B* y todos los que determinan el segmento *AB* (ver figura 4.12).

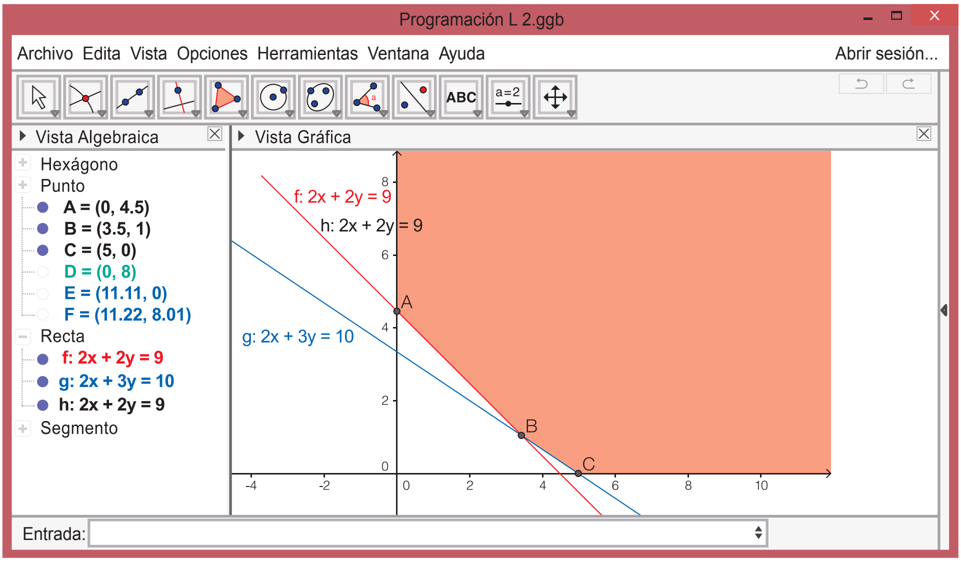


Figura 4.12. Coincidencia de la recta que representa la función objetivo, con el lado *AB* de la región factible

Ejemplo 3

Se desea fabricar dos productos *A* y *B*. Para la producción de cada unidad, se usan tres ingredientes *X*, *Y*, *Z*. En la elaboración de una unidad del producto *A*, hay que usar cuatro gramos de *X*, 2,5 gramos de *Y* y uno de *Z*. Para elaborar una unidad del producto *B* se requieren tres gramos de *X*, tres gramos de *Y* y dos de *Z*. La utilidad unitaria del producto *A* es $ 6 y del producto *B* es $ 5. Se dispone de 2,4 kg del ingrediente *X*, 1,6 kg de Y y 0,9 kg de *Z*. ¿Cuántas unidades de cada producto se deben elaborar para aumentar al máximo las utilidades.

Solución:

La tabla 4.7 resume los datos del problema planteado:

Ingredientes	Gramos requeridos para una unidad de A	Gramos requeridos para una unidad de B	kg disponibles
X	4	3	2.4
Y	2.5	3	1.6
Z	1	2	0.9

Tabla 4.7. Resumen de ingredientes y gramos requeridos para la producción y su disponibilidad

Designemos con:

x = número de unidades del producto A.

y = número de unidades del producto B.

La venta de una unidad del producto A deja una gana de \$ 6 y de una unidad del producto B \$ 5. La utilidad z obtenida al producir x unidades de A y y unidades de B es $z = 6x + 5y$, a esta se le conoce como **función objetivo.**

Las restricciones del problema están representadas en las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} 1)\ \ 4x+3y \leq 2400 \\ 2)\ \ 2.5x+3y \leq 1600 \\ 3)\ \ x+2y \leq 900 \\ 4)\ \ x \geq 0 \\ 5)\ \ y \geq 0 \end{cases}$$

Con GeoGebra, el primer paso es graficar las restricciones como ecuaciones y hallamos los puntos de corte de las rectas que bordearan la región factible. La ventana de GeoGebra nos muestra la Vista Algebraica y Vista Gráfica con los resultados y gráficos respectivamente (ver figura 4.13).

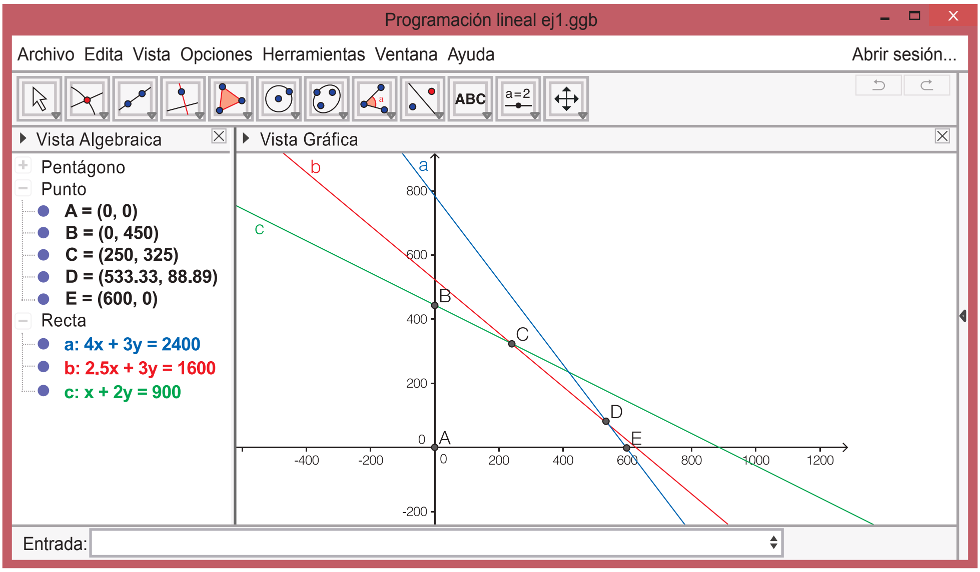


Figura 4.13. Representación de las restricciones del ejemplo 3

La siguiente ventana de GeoGebra nos muestra la solución del sistema de inecuaciones, a esta región se le conoce como región factible R.

Los valores de los vértices de *R* servirán para hallar el valor de la función objetivo y determinar en cuál de estos vértices la función se maximiza o minimiza según sea el caso del problema planteado (ver figura 4.14).

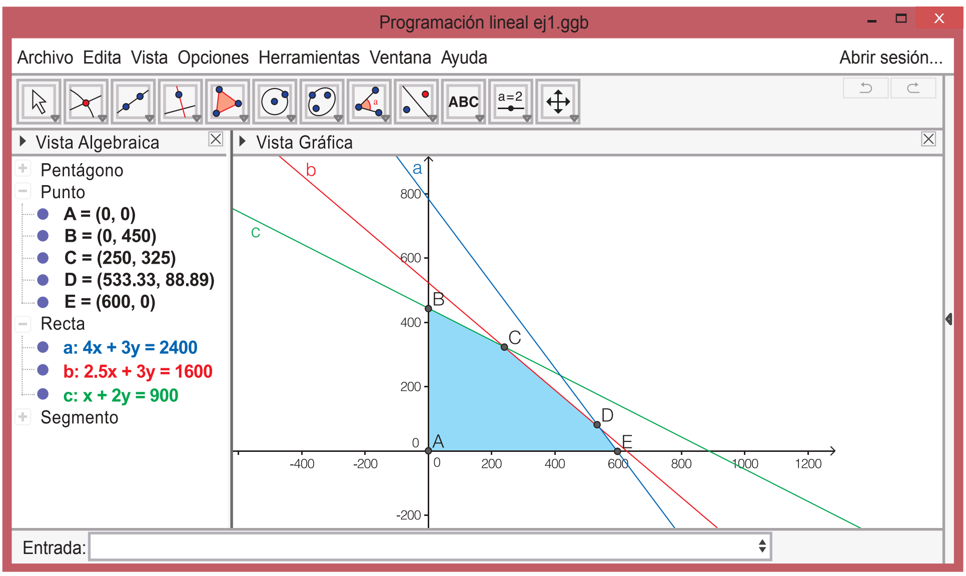


Figura 4.14. Determinación de los vértices de la región factible de ejemplo 3

El valor máximo de *z*. Lo encontraremos en cualquiera de los vértices de *R*. Los valores de en cada uno de los vértices de *R* se muestran a continuación:

$A\ (0, 0) \Rightarrow z = 6(0) + 5(0) \Rightarrow z = 0$

$B\ (0{,}450) \Rightarrow z = 6(0) + 5(450) \Rightarrow z = 2250$

$C\ (250, 325) \Rightarrow z = 6(250) + 5(325) \Rightarrow z = 3125$

$D\ (533.3, 88.89) \Rightarrow z = 6(533) + 5(89) \Rightarrow z = 3643$

$E\ (600, 0) \Rightarrow z = 6(600) + 5(0) \Rightarrow z = 3600$

Para el cálculo de *z*, en el punto *C*, se tomam los valores enteros redondeados, dado que estos representan unidades de productos, que no pueden ser valores decimales. Para maximizar la utilidad, se deben elaborar 533 unidades del producto *A* y 89 del producto *B*.

Ejemplo 4

Un fabricante de equipo y accesorios para golf produce dos modelos de bolsas de golf, las bolsas modelo uno tienen una utilidad de $ 35 y las de modelo dos, una utilidad de $ 25. Los tiempos requeridos para la producción se muestran en la tabla 4.8.

Producto	Tiempo de producción (horas)				Utilidad por bolsa ($)
	Corte y teñido	Costura	Terminado	Inspección y empaque	
Modelo 1	7/10	1/2	1	1/10	35
Modelo 2	1	5/6	2/3	1/4	25

Tabla 4.8. Resumen de los tiempos de producción y la utilidad por bolsa y por modelo

El director de manufactura estima que, durante los siguientes tres meses, estarán disponibles 630 horas de tiempo de corte y teñido, 600 horas de tiempo de costura, 708 horas de tiempo de terminado y 135 horas de tiempo de inspección y empaque para la producción de las bolsas de golf. ¿Cuántas bolsas de cada modelo se deben producir para maximizar la utilidad?

Solución:

Designemos con:

x = número de bolsas modelo uno

y = número de bolsas modelo dos

Según el enunciado del problema, las bolsas modelo uno dejan una utilidad de \$ 35 y las de modelo dos, una utilidad de \$ 25. Por lo tanto, la utilidad z obtenida al producir x unidades del modelo uno y y unidades del modelo dos es $z = 35x + 25y$, a esta se le conoce como función objetivo.

Las restricciones del problema están representadas en las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} 1)\ \dfrac{7}{10}x + y \leq 630 \\ 2)\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{6}y \leq 600 \\ 3)\ x + \dfrac{2}{3}y \leq 708 \\ 4)\ \dfrac{1}{10}x + \dfrac{1}{4}y \leq 135 \\ 5)\ x \geq 0 \\ 6)\ y \geq 0 \end{cases}$$

Utilizando GeoGebra, el primer paso es graficar las restricciones como ecuaciones y, utilizando el *software,* hallamos los puntos de corte de las rectas que bordean la región factible, la ventana de GeoGebra nos muestra la Vista Algebraica y Vista Gráfica con los resultados y gráficos respectivamente (ver figura 4.15).

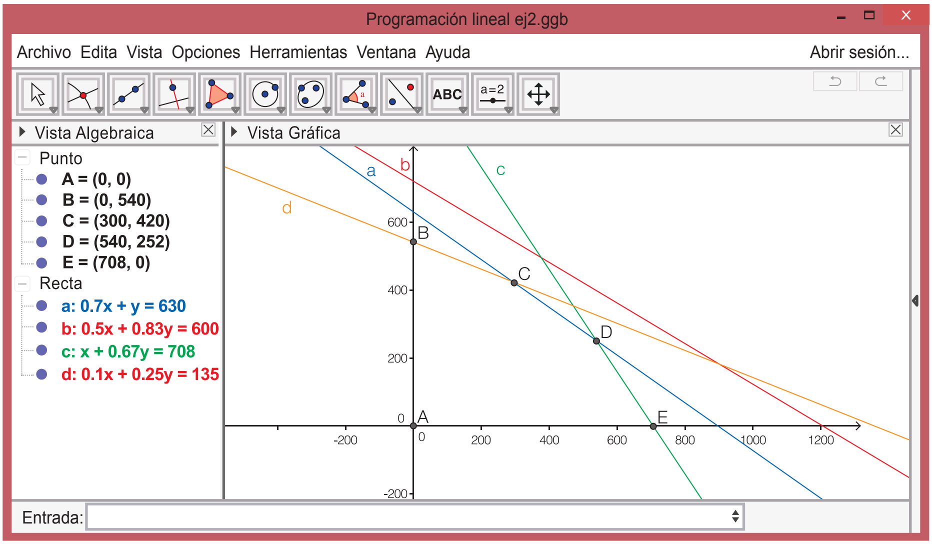


Figura 4.15. Representación de las restricciones del ejemplo 4

La siguiente ventana de GeoGebra nos muestra la solución del sistema de inecuaciones, conocido como región factible R, los valores de los vértices de R servirán para hallar el valor de la función objetivo y determinar en cuál de estos vértices la función se maximiza (ver figura 4.16).

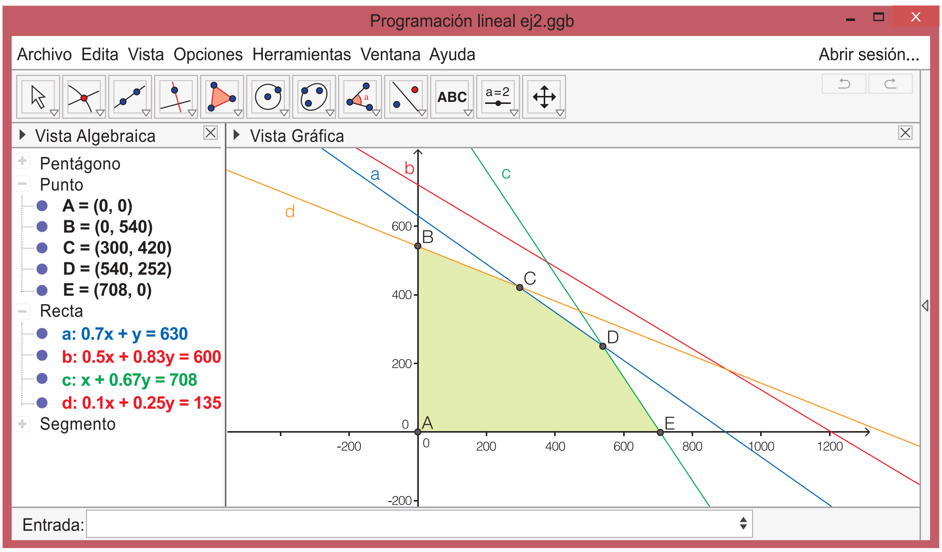


Figura 4.16. Determinación de los vértices de la región factible del ejemplo 4

El valor máximo de z lo encontraremos en cualquiera de los vértices de R. Los valores de z en cada uno de los vértices de R se muestran a continuación:

A (0, 0) $\Rightarrow z = 35(0) + 25(0) \Rightarrow z = 0$

B (0,540) $\Rightarrow z = 35(0) + 25(540) \Rightarrow z = 13500$

C (300, 420) $\Rightarrow z = 35(300) + 25(420) \Rightarrow z = 21000$

D (540, 252) $\Rightarrow z = 35(540) + 25(252) \Rightarrow z = 25200$

E (708, 0) $\Rightarrow z = 35(708) + 25(0) \Rightarrow z = 24780$

Para maximizar la utilidad, se debe elaborar 540 bolsas del modelo 1 y 252 del modelo 2, obteniéndose una utilidad de $ 25200.

EJERCICIOS PROPUESTOS 4.6

Dada la función objetivo z sujeta a las restricciones expuestas, halle los valores que minimicen o maximicen según sea el caso.

1) $z = 40x + 30y$, maximizar

Restricciones

$$\begin{cases} 1)\ 0.4x + 0.5y \le 20 \\ 2)\ 0.6x + 0.35y \le 21 \\ 3)\ 0 \le x \le 25 \\ 4)\ y \ge 0 \end{cases}$$

2) $z = 2x + 3y$, minimizar

Restricciones

$$\begin{cases} 1)\ x + y \ge 350 \\ 2)\ 2x + y \le 600 \\ 3)\ x \ge 125 \\ 4)\ y \ge 0 \end{cases}$$

3) $z = 2x + 2y$, minimizar

Restricciones

$$\begin{cases} 1)\ x + 3y \le 12 \\ 2)\ 3x + y \ge 13 \\ 3)\ x - y < 3 \\ 4)\ x \ge 0 \\ 5)\ y \ge 0 \end{cases}$$

4) $z = 2400x + 1800y$, maximizar

Restricciones

$$\begin{cases} 1)\ 6x + 3y \le 21000 \\ 2)\ 2x + 2.5y \le 1000 \\ 3)\ x \ge 0 \\ 4)\ y \le 280 \end{cases}$$

5) $z = 8x + 8y$, maximizar

Restricciones

$$\begin{cases} 1)\ x + 1,5y \leq 900 \\ 2)\ 0,5x + 0,333y \leq 300 \\ 3)\ 0,125x + 0,25y \leq 100 \\ 4)\ x \geq 0 \\ 5)\ y \geq 0 \end{cases}$$

6) $z = 0,12x + 0,9y$, maximizar

Restricciones

$$\begin{cases} 1)\ x + y \leq 50\ 000 \\ 2)\ 0,006x + 0,004y \leq 240 \\ 3)\ x \geq 3500 \\ 4)\ y \leq 6500 \end{cases}$$

7) $z = 0,02x + 0,025y$, minimizar

Restricciones

$$\begin{cases} 1)\ 2x + 1.5y \geq 1.7 \\ 2)\ 2x + 3y \leq 2.8 \\ 3)\ 4x + 3y \leq 3.6 \\ 4)\ x \geq 0 \\ 5)\ y \geq 0 \end{cases}$$

8) $z = 10\ 000x + 8000y$, minimizar

Restricciones

$$\begin{cases} 1)\ x + y \geq 25 \\ 2)\ x \leq 8 \\ 4)\ y \leq 10 \end{cases}$$

9) $z = 0,30x + 0,5y$, maximizar

Restricciones

$$\begin{cases} 1)\ 0,3x + 0,6y \leq 18\,000 \\ 2)\ 2x + 3y \leq 2,8 \\ 3)\ 4x + 3y \leq 3,6 \\ 4)\ x \geq 0 \\ 5)\ y \geq 0 \end{cases}$$

10) $z = 4x + 6y$, minimizar

Restricciones

$$\begin{cases} 1)\ 2x + 2y \geq 9 \\ 2)\ 2x + 3y \geq 10 \\ 3)\ x \geq 0 \\ 4)\ y \geq 0 \end{cases}$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Un fabricante de computadores produce dos tipos de modelos *A* y *B*. Para satisfacer la demanda, la producción diaria del modelo *A* debe estar entre 500 y 2000, y entre 3000 y 5000 para el modelo *B*. No se puede producir más de 6000 computadores diarios. En un computador de modelo *A* se obtiene una utilidad de \$ 150 y en el modelo *B*, \$ 120.

¿Cuántos computadores de cada modelo deberán fabricar cada día para maximizar la utilidad?

Sol. 4 busetas y 6 buses

Sol. 2000 de modelo *A* y 4000 del *B*

2. Un agricultor desea producir entre 20 y 65 hectáreas de papas y maíz. El costo de la semilla por hectárea es $ 50 para papas y $ 80 para maíz. El costo de producción por hectárea de papas asciende a $ 350 y, por hectárea de maíz, es de $ 200. El ingreso esperado es $ 1000 por hectárea de papas y $ 750 por hectárea de maíz. El dinero disponible para semilla es $ 4900 y para producción, $ 18 000.

¿Cuántas hectáreas de papas y maíz debe producir obtener la máxima utilidad?

Sol. 33 hectáreas de papas y 32 de maíz

3. Una tienda planea vender pasteles de chocolate y vainilla. Para la adquisición, dispone no más de $ 200. Los pasteles de chocolate cuestan $ 4 c/u y los de vainilla $ 3. El tendero planea vender los pasteles de chocolate a $ 5 y los de vainilla a $ 4.

Por experiencia, sabe que no venderá más de 60 pasteles y, que, en *stock,* debe tener hasta 35 pasteles de chocolate y 45 de vainilla. ¿Cuántos pasteles de cada sabor debe vender para maximizar la utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima?

Sol. 15 pasteles de chocolate y 45 de vainilla o 20 de chocolate y 40 vainilla; la utilidad máxima en los dos casos sería de $ 60.

4. Una compañía de transporte interprovincial desea comprar, entre busetas y buses, al menos tres vehículos. Para la compra, dispone de $ 480 000 y para el mantenimiento mensual $ 1800. El costo de una buseta es de $ 40 000 y su mantenimiento mensual es de $ 100. El precio de un bus es de $ 60 000 y su mantenimiento mensual es de $ 300. Las busetas tienen una capacidad de 25 pasajeros y los buses de 45. ¿Cuantos buses y busetas se tienen que comprar para maximizar la capacidad de pasajeros?

5. Una avícola desea criar, a lo sumo, 800 gallinas de las variedades *A* y *B*. El costo diario para la variedad *A* es $ 0,15 por gallina y, de la variedad *B* es de $ 0,12 por gallina, y el costo total no debe pasar de $ 4500. Al término de 40 días, un ave de la variedad *A* costará $ 7,5 y una de la *B*, $ 6. ¿Cuántas gallinas de cada especie se deben criar para maximizar la utilidad? ¿Cuál es la utilidad?

Sol. 500 de *A* y 300 de *B*, utilidad $ 1050

6. En una fábrica, se construyen dos tipos de juegos de comedor, moderno y estándar. Se dispone de 100 m^2 de tableros de madera especial. Los modernos necesitan 5 m^2 de tablero y el estándar, 4 m^2. Se debe construir al menos cinco juegos de comedor moderno, y el número de juegos estándar debe ser el doble del número de modernos. Si la ganancia por cada juego de comedor moderno es de $ 100 y por cada estándar, de $ 85. ¿Cuántos juegos deben fabricarse de cada tipo para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será el beneficio?

Sol. 5 modernos y 19 estándar, el beneficio es $ 2115

7. Un empresario fabrica camisas y pantalones para jóvenes. Para hacer una camisa se necesitan 1.5 metros de tela y ocho botones, y para hacer un pantalón hacen falta dos metros de tela, tres botones y una cremallera. La empresa dispone de 1200 metros de tela, 280 cremalleras y al menos 1000 botones. El beneficio que se obtiene por la venta de una camisa es de $ 35 y el de un pantalón es de $ 45. Suponga que se vende todo lo que se fabrica. Calcule el número de camisas y de pantalones que debe confeccionar para obtener el máximo beneficio y determine este beneficio máximo.

Sol. 317 camisas, 283 pantalones, $ 23 830 de beneficio

8. Un negociante dispone de $ 15 000 para comprar dos tipos de relojes *A* y *B*. Los del tipo *A* lo compra a $ 80 y los vende a $ 120, mientras que los

del tipo B, los compra a \$ 100 y los vende a \$ 150. Sabiendo que no puede comprar más de 160 relojes. ¿Cuántos de cada tipo deberá adquirir para que el beneficio que obtenga sea máximo? ¿Cuál será el beneficio?

Sol. 50 relojes *A*, 110 relojes *B*; el beneficio es \$ 22 500

9. Un nutricionista desea comprar dos tipos de alimentos X y Y para asegurarse al menos 8 g de carbohidratos y 60 de proteínas. El alimento X contiene 1 g de carbohidratos y 9 g de proteínas; el alimento Y contiene 1 g de carbohidratos y cinco de proteínas. Si el alimento X cuesta \$ 12 por frasco y el Y \$ 8. ¿Cuántos frascos de cada alimento deben comprarse para minimizar el costo?

Sol. Se deben comprar cinco frascos del alimento *Y* y 3 de *X*

10. Un agricultor desea comprar dos marcas de fertilizantes F y E que contienen tres nutrientes: X, Y y Z. Los mínimos necesarios son 120 g de X, 150 g de Y y 100 de Z. Una bolsa de la marca F cuesta \$ 15, contiene 3 g de X, 5 de Y y 2 g de Z. Una bolsa de la marca E cuesta \$ 10, contiene 2 g de nutriente X y Y, y 3 g de Z. Si el agricultor desea minimizar los costos, ¿cuántas bolsas de cada marca debe comprar? ¿de cuánto es el gasto mínimo?

Sol. El agricultor tiene varias combinaciones de compra, el gasto mínimo es de \$ 600

CAPÍTULO 5 RELACIONES Y FUNCIONES

5.1. Producto cartesiano par ordenado

Un par ordenado es un conjunto de dos elementos a y b , que lo denotamos por $(a\ ,\ b)$. Al elemento a se lo denomina primera componente o **abscisa** y b es la segunda componente conocida como **ordenada**.

Se debe recordar que, no es lo mismo $(a\ ,\ b)$ que $(b\ ,\ a)$

Definición 5.1. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Se define el producto cartesiano entre A y B , y se denota por A x B , al conjunto:

$$A\ x\ B = \{(a,b)\ /\ a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Ejemplos

Dados los siguientes conjuntos, hallar el producto cartesiano.

1. $A = \{-1, 0, 2\}$ y $B = \{-3, -2, 4\}$

A x $B = \{(-1,-3); (-1,-2); (-1,4); (0,-3); (0,-2); (0, 4); (2,-3); (2,-2); (2,4)\}$

2. $C = \{a, b, c\}$ y $D = \{-1, 2, 3\}$

$C\ x\ D = \{(\mathrm{a},-1); (\mathrm{a},2); (\mathrm{a},3); (\mathrm{b},-1); (\mathrm{b},2); (\mathrm{b},3); (\mathrm{c},-1); (\mathrm{c},2); (\mathrm{c},3)\}$

REPRESENTACIONES DEL PRODUCTO CARTESIANO

1. DIAGRAMAS DE VENN

El producto cartesiano se representa utilizando los diagramas de Venn, por ejemplo:

a. Sean los conjuntos $P = \{\ 2, 3, 4\}$ y $Q = \{\ \mathrm{a, b, c}\ \}$. El producto de $P\ x\ Q$ se representa en la figura 5.1.

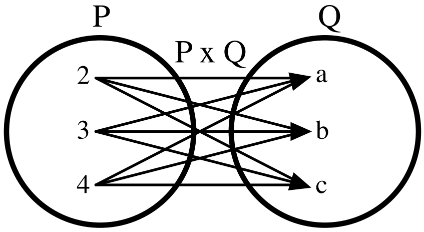


Figura 5.1. Representación de P x Q

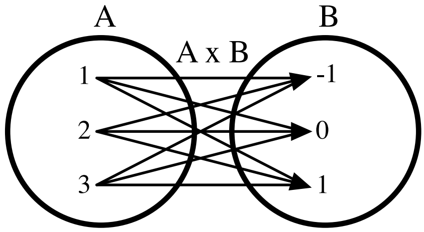


Figura 5.2. Representación de A x B

b. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{-1, 0, 1\}$. A x B se representa en la figura 5.2.

2. PLANO CARTESIANO

El producto cartesiano entre dos conjuntos se representa en el plano cartesiano:

a. Sean los conjuntos $A = \{-3, -1, 1, 4\}$ y $B = \{-2, 0, 2\}$. El producto de AxB se representa en la figura 5.3.

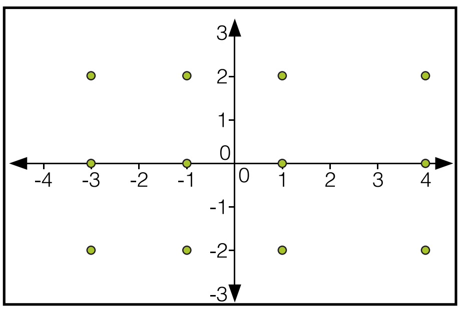


Figura 5.3. Representación de A x B

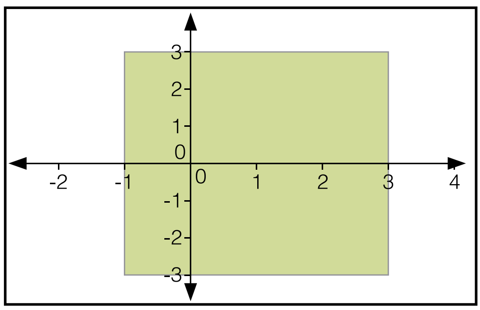


Figura 5.4. Representación de C x D

b. Sean los conjuntos $C = [-1,3]$ y $D = [-3,3]$. La representación de C x D, ver en figura 5.4.

c. Si $E = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -3 \leq x \leq -1 \text{ o } 2 < x < 5\}$ y $F = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -5 \leq x \leq -3 \text{ o } -1 \leq x \leq 1\}$ la representación de E x $F = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$, ver en figura 5.5.

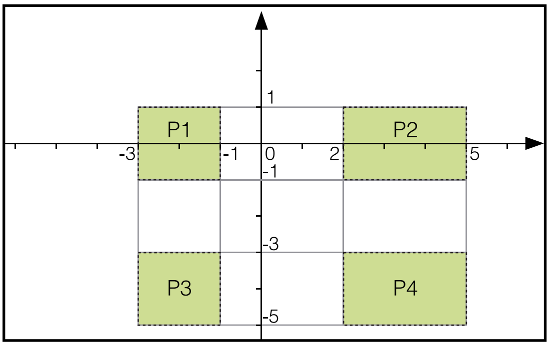


Figura 5.5. Representación de E x F

5.2. Relación

Definición 5.2. Sean *A* y *B* conjuntos cualesquiera y distintos del vacío. Una relación de *A* en *B* es un subconjunto de *A x B*.

Ejemplo 1

Sea $P = \{2, 3, 4, 6\}$ y $Q = \{4, 6, 8\}$. Definamos las siguientes relaciones entre *P* y *Q*.

a. $R_1 = \{(x, y) \,/\, x \text{ es la mitad de } y\}$

Las parejas que cumplen con la condición de R_1 se representan en el diagrama de Venn (ver figura 5.6).

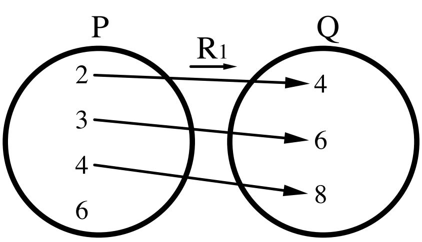


Figura 5.6. Representación de la relación R_1

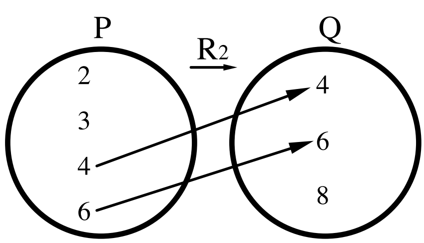


Figura 5.7. Representación de la relación R_2

b. $R_2 = \{(x, y) / x = y\}$.

Las parejas que cumplen con la condición de R_2 se representan en el diagrama de Venn (ver figura 5.7).

c. $R_3 = \{ (x, y) / \text{x es divisor de } y\}$.

Las parejas que cumplen con la condición de R_3 se representan en el diagrama de Venn (ver figura 5.8).

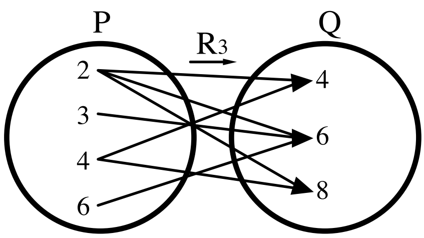


Figura 5.8. Representación de la relación R_3

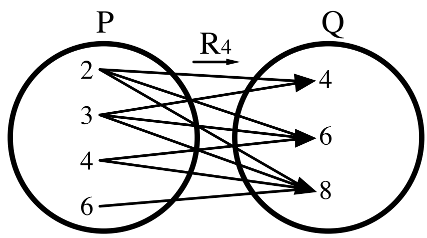


Figura 5.9. Representación de la relación R_4

d. $R_4 = \{ (x ,y) / x \text{ es menor que } y\}$.

Las parejas que cumplen con la condición de R_4 se representan en la figura 5.9.

e. $R_5 = \{ (x, y) / y = x + 2\}$.

Las parejas que cumplen con la condición de R_5 se representan en la figura 5.10.

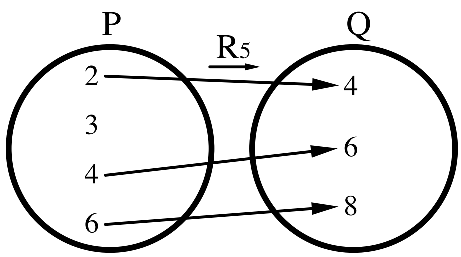


Figura 5.10. Representación de la relación R5

Ejemplo 2

Sean los conjuntos $A = \{-2, 3, 0, 5\}$ y $A = \{4, 0, 9, 10\}$. Definamos las siguientes relaciones entre A y B.

a. $R_1 = \{(x, y) / y = x^2\}$

Las parejas que cumplen con la condición de R_1 , se representan en el diagrama de Venn (ver figura 5.11).

b. $R_2 = \{ (x, y) / y = 2x\}$

Las parejas que cumplen con la condición de R_2 , se representan en el diagrama de Venn (ver figura 5.12).

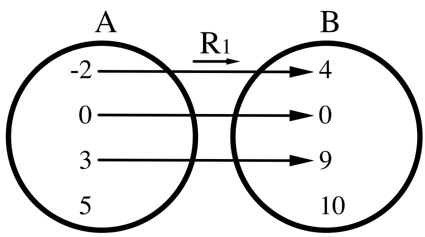


Figura 5.11. Representación de la relación R_1

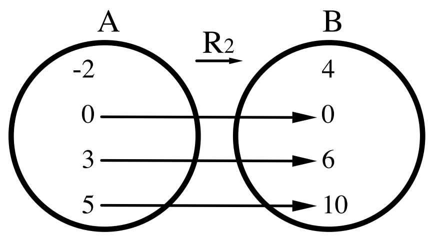


Figura 5.12. Representación de la relación R_2

NOTA: una relación de ***A*** en ***A*** se llama una relación en *A*.

Definición 5.3. Sea R una relación de A en B. Se define el dominio de una relación como: Dom $R = \{x \in A / x\ R\ y, y \in B\}$.

El recorrido de una relación se define como: Rec R $=\{ y \in B / xRy, x\in A\}$.

Dado que la relación R está definida de A en B, se cumple que:

$$Dom\ R \subset A \text{ y } Rec\ R \subset B$$

Ejemplos.

1. El dominio y el recorrido del ejemplo 1 literal a es:

$$Dom\ R_1 = \{2, 3, 4\} \text{ y } Rec\ R_1 = \{ 4, 6, 8 \}$$

2. El dominio y el recorrido del ejemplo 2 literal b es:

$$Dom\ R_2\ \{\ 0, 3, 5\ \}\ \text{y Rec}\ R_2\ \{\ 0, 6, 10\ \}$$

3. Hallar el dominio y el recorrido de la relación:

$$R = \{(x, y)\ /\ x^2 + y^2 \leq 16\ y\ x^2 - y^2 \geq 4\}$$

$$Dom\ R = [-4,-2] \cup [2,4]\ \text{y}\ Rec\ R = [-2.4,-2.4]$$

Su representación se grafica en la figura 5.13.

4. Hallar el dominio y el recorrido de la relación:

$$R = \left\{(x, y)\ /\ y \geq |x|\ \ \text{y}\ \ y \leq \frac{11}{x^2 + 2}\right\}$$

$$\text{Dom R} = [-1.9,1.9]\ \text{y Rec R} = [0, 5.5]$$

Su representación ver en figura 5.14.

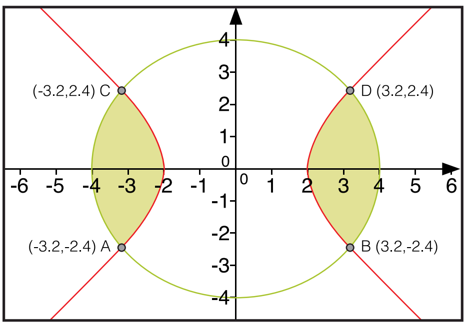


Figura 5.13. Representación de la relación R

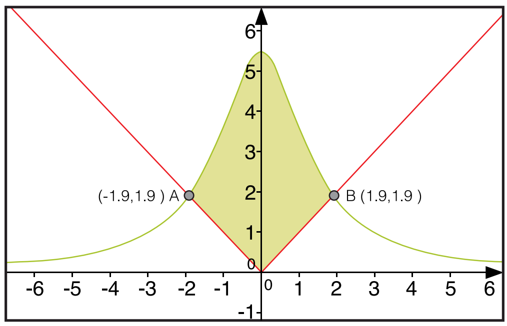


Figura 5.14. Representación de la relación R

5.3. Funciones

Definición 5.4. Una función f definida de un conjunto A en un conjunto B, denotada por $f : A \rightarrow B$, es una regla que asocia a cada elemento x de A uno y solo un elemento y de B, llamado imagen de x por f, y se denota $y = f(x)$.

De la definición de f, se deduce que, si f es una función, en f no pueden existir dos pares ordenados con primeras componentes iguales.

Matemáticamente, f es una función de A en B, si:

a) $f \subset A x\, B$

b) $(x, y) \in f \wedge (x, y) \in f \Rightarrow y = y'$

Ejemplos

Sean $A = \{-1, 0, 2, 7\}$ y $B = \{1, 0, 3, 8\}$

Determinar cuáles de las siguientes relaciones representadas en los diagramas de Venn son funciones:

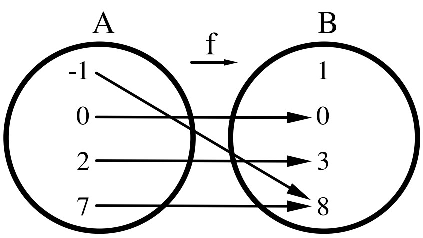


Figura 5.15. Relación f definida de A en B

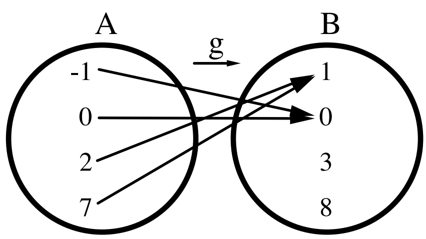


Figura 5.16. Relación g definida de A en B

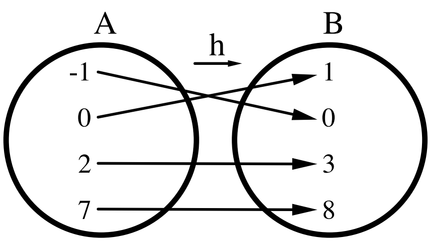


Figura 5.17. Relación h definida de A en B

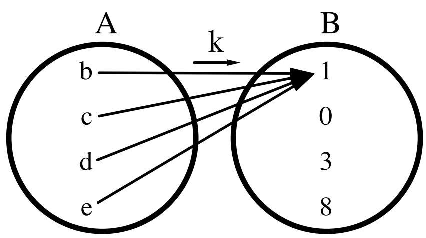


Figura 5.18. Relación k definida de A en B

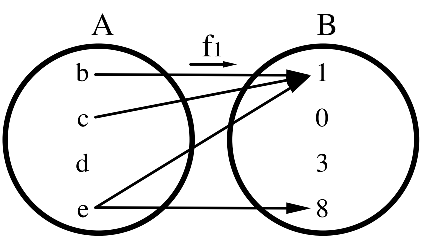


Figura 5.19. Relación f_1 definida de A en B

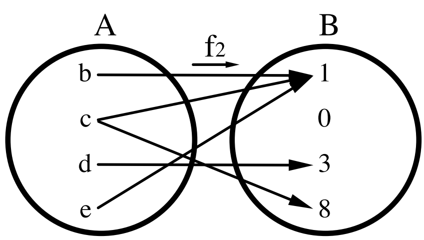


Figura 5.20. Relación f_2 definida de A en B

Las relaciones representadas en la figuras 5.15, 5.16 y 5.17 son funciones porque cumplen con las condiciones de la definición.

La relación representada en la figura 5.18 no es función porque el elemento $e \in A$ está asociado con dos elementos.

La relación de la figura 5.19 no es función porque $e \in A$ está asociado con dos elementos de B, además $d \in A$ no está asociado con ningún elemento de B.

La relación de la figura 5.20 no es función porque $c \in A$ está asociado con dos elementos de B.

Definición 5.5. Sea f una función de A en B, al conjunto A se lo denomina dominio de la función f y se denota por $Dom\, f = A$.

Los elementos de B asociados con los elementos de A, forman un conjunto denominado recorrido de f, y se denota por $Rec\, f$. Es decir:

$$Rec\, f = \{ y \in B \,/\, \exists\, x \in A,\ y = f(x) \}$$

Ejemplos

1. Determinar el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

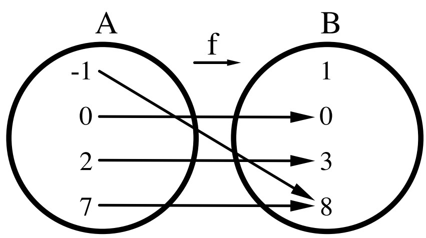


Figura 5.21. Función f definida de A en B

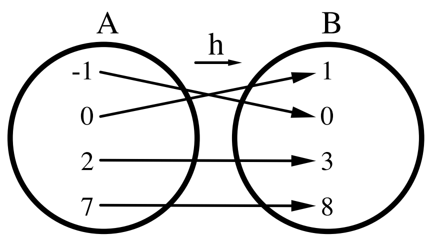


Figura 5.22. Función h definida de A en B

En relación con la figura 5.21, el dominio y recorrido está dado por:

$$Dom\, f = \{ -1, 0, 2, 7 \} \text{ y } Rec\, f = \{ 0, 3, 8 \}$$

Con relación a la figura 5.22, el dominio y recorrido está dado por:

$$Dom\, h = \{ -1, 0, 2, 7 \} \text{ y } Rec\, h = \{ 1, 0, 3, 8 \}$$

Con respecto a la figura 5.23, el dominio y recorrido está dado por:

$$Dom\ g = \{ \text{a, b, g, h} \} \text{ y } Rec\ g = \{ -2, 5 \}$$

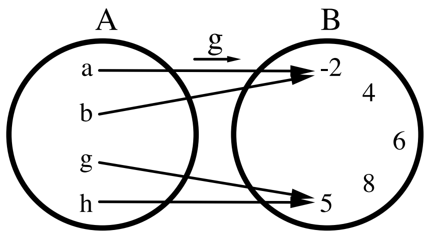


Figura 5.23. Función g definida de A en B

2. Sea la función $f(x) = 3x - 2$, hallar el dominio y el recorrido.

El dominio y el recorrido de f es: $Dom\ f = \mathbb{R}$ y $Rec\ f = \mathbb{R}$.

3. Dado $f(x) = -x^2 + 1$, hallar el dominio y el recorrido, ver figura 5.24.

El dominio de la función f es: $Dom\ f = \mathbb{R}$.

Para el recorrido de $y = -x^2 + 1$ despejamos x , obteniendo $x = \pm\sqrt{1 - y}$. Dado que $1 - y \geq 0$, obtenemos $y \leq 1$. Entonces $Rec\ f =]-\infty, 1]$.

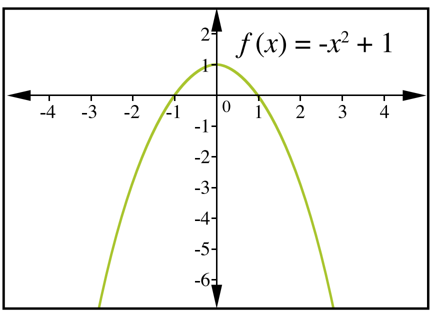


Figura 5.24. Gráfica de función ejemplo 3

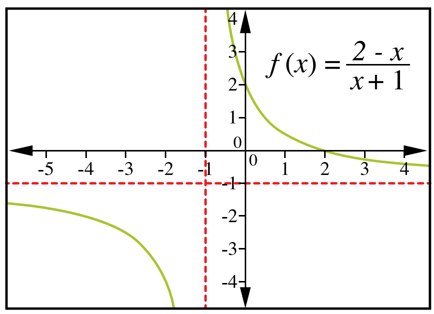


Figura 5.25. Gráfica de función ejemplo 4

4. Dado $f(x) = \dfrac{2 - x}{x + 1}$ hallar el dominio y el recorrido (ver figura 5.25).

El denominador de la función racional debe ser diferente de cero, es decir:

$$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

Por lo tanto, $Dom\ f = \mathbb{R} - \{-1\}$

Para el recorrido de $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$ despejamos x :

$$y=\frac{2-x}{x+1} \Rightarrow y(x+1)=2-x \Rightarrow x(y+1)=2-y \Rightarrow x=\frac{2-y}{y+1}$$

El denominador de la última expresión debe ser diferente de cero, por tanto:

$$Rec\, f=\mathbb{R}-\{-1\}$$

5. Dado $f(x)=\dfrac{-1+x}{2x+1}$, hallar el dominio y el recorrido (ver figura 5.26).

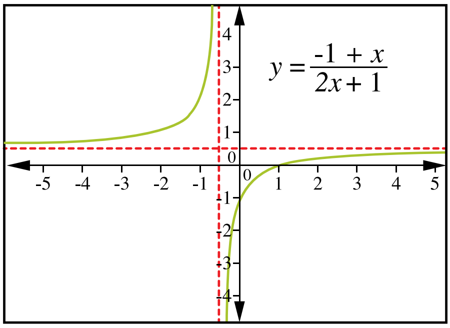


Figura 5.26. Gráfica de función ejemplo 5

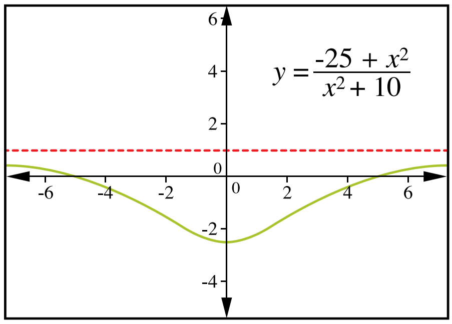


Figura 5.27. Gráfica de función ejemplo 6

El denominador de la función racional debe ser diferente de cero, es decir:

$$2x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -\frac{1}{2}$$

Por tanto, $Dom\ f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Para el recorrido de $y=\dfrac{-1+x}{2x+1}$ despejamos x :

$$y=\frac{-1+x}{2x+1} \Rightarrow x(2y-1)=-1-y \Rightarrow x=\frac{-1-y}{2y-1}$$

El denominador de la última expresión debe ser diferente de cero, por tanto:

$$Rec\ f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

6. Dado $f(x)=\dfrac{-25+x^2}{x^2+10}$, hallar el dominio y el recorrido (ver figura 5.27).

El denominador de la función racional $x^2+1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $Dom\, f = \mathbb{R}$.

Para el recorrido de $f(x) = \dfrac{-25+x^2}{x^2+10}$ despejamos x :

$$y = \frac{-25+x^2}{x^2+10} \Rightarrow x^2(y-1) = -25-10y \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-25-10y}{y-1}}$$

Para hallar el recorrido, la expresión $\dfrac{-25-10y}{y-1} \geq 0$. Cada uno de los factores de la expresión iguales a cero, y sus soluciones las ubicamos en la tabla 5.1, para el análisis respectivo, es decir: $-25-10y = 0 \Rightarrow y = -2{,}5$ y $y-1 = 0 \Rightarrow y = 1$

$-\infty$	-2.5	1	∞
$-25-10y$	+	-	-
$y-1$	-	-	+
$\dfrac{-25-10y}{y-1} \geq 0$	-	+	-

Tabla 5.1. La tabla muestra el intervalo solución de la desigualdad

La solución de la desigualdad es $[-2{,}5,\ 1\,[$. Por lo tanto $Rec\, f = [-2.5,\ 1[$

7. Dado $f(x) = \begin{cases} -x^2+3, & x \in\,]-\infty,-2\,[\\ x+1, & x \in [-2,2\,]. \\ x^3-5, & x \in\,]\,2,+\infty[\end{cases}$

Hallar el dominio y el recorrido (ver figura 5.28).

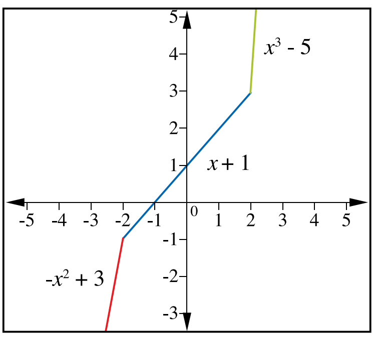


Figura 5.28. Gráfica de función ejemplo 7

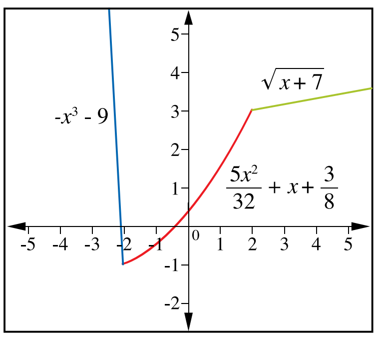


Figura 5.29. Gráfica de función ejemplo 8

El dominio de la función son todos los reales, es decir: *Dom f* = $\mathbb{R}$.

El recorrido, que se puede deducir a partir de la gráfica, son todos los números reales.

8. Dado $g(x)=\begin{cases} -x^3-9\,, & x\in\left]-\infty,-2\right[\\ \dfrac{5x^2}{32}+x+\dfrac{3}{8}\,, & x\in\left[-2,2\right] \\ \sqrt{x+7}\,, & x\in\left]2,+\infty\right[\end{cases}$

Hallar el dominio y el recorrido (ver figura 5.29).

El dominio de la función son todos los reales, es decir, *Dom f* =$\mathbb{R}$.

El recorrido, que se puede deducir a partir de la gráfica, es el intervalo $[-1,\infty[$.

EJERCICIOS PROPUESTOS 5.1

1. Dados los conjuntos *A* y *B*, halle *AxB* y *BxA* y represente en el plano cartesiano

a) *A* = {- 2, -1, 2, 3, 6 } y *B* = {- 2, -1, 0, 2, 3, 6 }

b) *A* =]−5, 3] y *B* = {- 2, -1, 1, 2 }

c) *A* =]−5, - 2] $\cup$ [2, 5 [y *B* = {- 4, -1, 3, 7 }

d) *A* = {-3, - 2, 5, 8 } y *B* =]−7, -3] $\cup$ [−1, 2 [$\cup$ [4, 8 [

2. Sea *C* = { 2, 3, 4, 5, 6 } y *D* = { 4, 6, 7, 8, 10, 12 } Defina las siguientes relaciones entre *C* y *D*, halle sus elementos, dominio y recorrido.

a) R_1 = {(x, y) / y 2x }

b) R_2 {(x, y) / |x - y| 0 }

c) R_3= {(x, y) / y sea múltiplo de x}

d) R_4 = {(x, y) / x es menor que y }

e) R_5 = {(x, y) / y = x + 2}

f) R_6 = {(x, y) / x e y sean primos }

g) R_7= { (x, y) / y x^2 - 4 }

h) R_8 = {(x, y) / $y = x^3$ +2 }

i) R_9 = {(x, y) $x^2 - y^2 + x + y = 0$}

j) R_{10}=(x,y) / $y^2 = x^2 + 6x + 9$}

3. Construya las gráficas y halle el dominio y recorrido de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{3x-5}{5x-4}$ b) $f(x)=\dfrac{x-6}{x^2-4}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2-9}$

d) $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2+5x+4}$ e) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ f) $f(x)=\dfrac{2}{x^3-2}$

g) $f(x)=\dfrac{2}{x^3+1}$ h) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$ i) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$

j) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-3}{x-5}}$ k) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{3x-1}$ l) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+3}}$

m) $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x^2-9}{x-5}}$ n) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}}{x-1}$ o) $f(x)=\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2+1}}$

p) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<-3\\ -x^2, & -3\leq x\leq 4\\ 2x+1, & x>4\end{cases}$ q) $f(x)=\begin{cases}-x+3, & x<-2\\ -x^3, & -2\leq x\leq 2\\ -x^2, & x>4\end{cases}$

4. A partir de las gráficas de las funciones, halle el domino y recorrido.

4.1

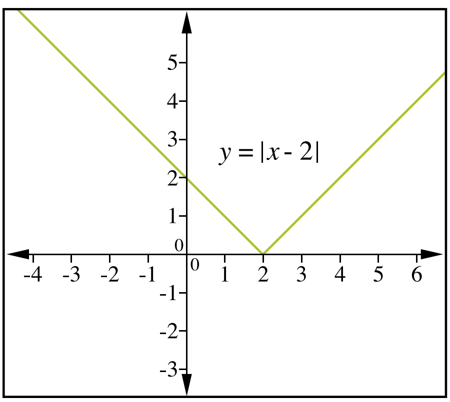


Figura 5.30. Gráfica de función ejercicio 4.1

4 .2

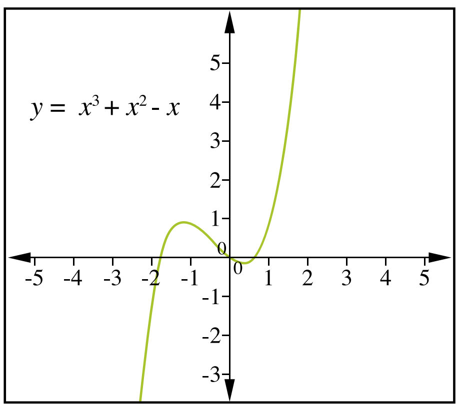


Figura 5.31. Gráfica de función ejercicio 4.2

4.3

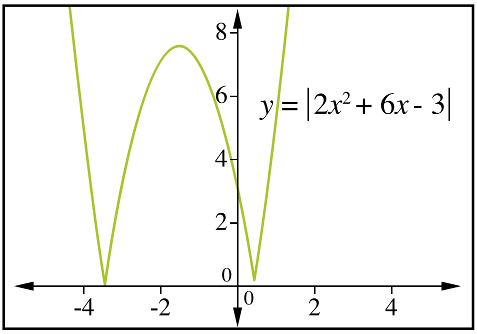


Figura 5.32. Gráfica de función ejercicio 4.3

4.4

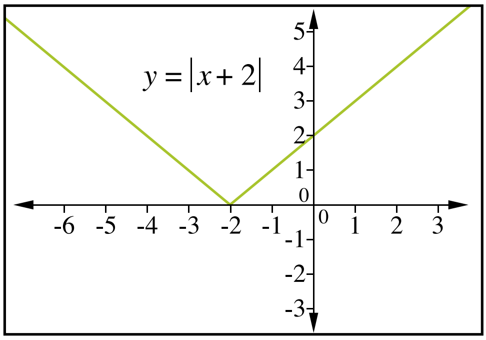


Figura 5.33. Gráfica de función ejercicio 4.4

4.5

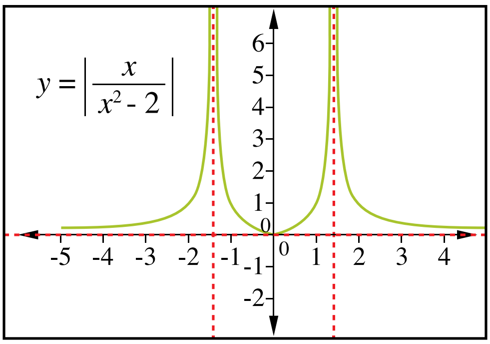


Figura 5.34. Gráfica de función ejercicio 4.5

4.6

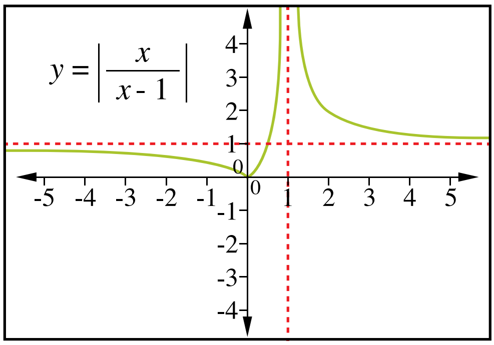


Figura 5.35. Gráfica de función ejercicio 4.6

4.7

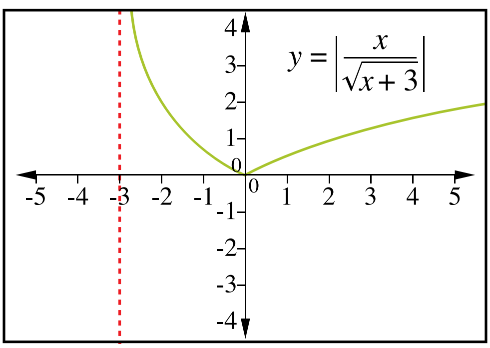


Figura 5.36. Gráfica de función ejercicio 4.7

4.8

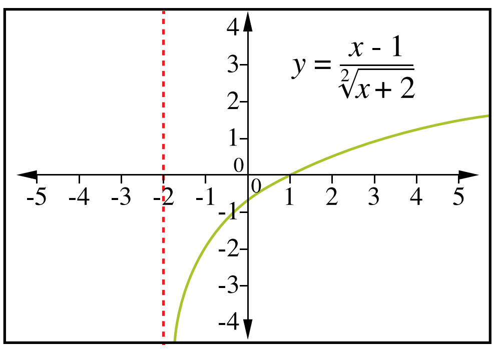


Figura 5.37. Gráfica de función ejercicio 4.8

4.9

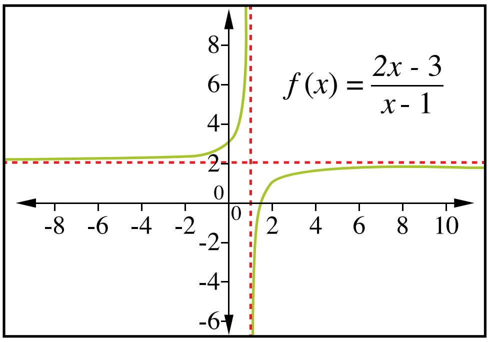


Figura 5.38. Gráfica de función ejercicio 4.9

4.10

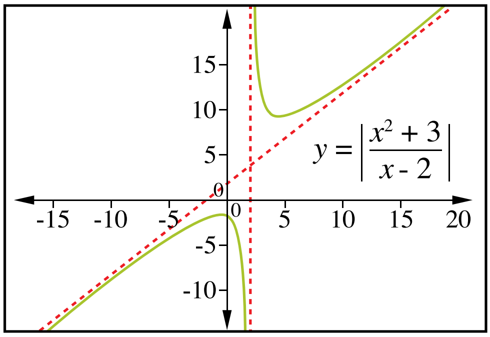


Figura 5.39. Gráfica de función ejercicio 4.10

5.4. Función inyectiva

Definición 5.6. Sea $f: A \rightarrow B$ una función, se dice que f es inyectiva si y solo sí:

$\forall\, x_1, x_2 \in A:\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

También se dice que f es inyectiva si: $\forall\, x_1, x_2 \in \mathrm{A}:\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Ejemplos.

1. Determine si las siguientes funciones, representadas en diagramas de Venn, son inyectivas o no

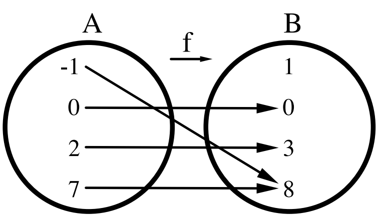


Figura 5.40. Función f definida de A en B

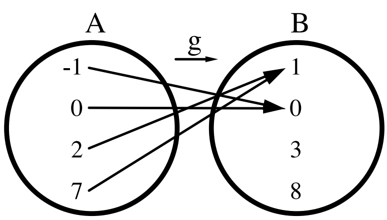


Figura 5.41. Función g definida de A en B

La función f, de la figura 5.40, no es inyectiva, porque los elementos -1 y 7 tienen la misma imagen.

La función g, de la figura 5.41, no es inyectiva ya que los elementos -1 y 0 tienen la misma imagen, al igual que 2 y 7.

2. Determine si la función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 2x - 3$ es inyectiva o no.

Para que f sea inyectiva, debe cumplir que: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

En efecto: $2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

3. Determine si la función, $f:[-2,+\infty[\to \mathbb{R} / f(x) = \sqrt{x+2}$ es inyectiva o no.

Probemos que: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

En efecto: $\sqrt{x_1+2} = \sqrt{x_2+2} \Rightarrow x_1+2 = x_2+2 \Rightarrow x_1 = x_2$

4. Determine si la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 2x^2 - 3$ es inyectiva o no.

Veamos si: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

En efecto: $2x_1^2 - 3 = 2x_2^2 - 3 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2|$

De la última expresión: $x_1 = x_2$ o $x_1 = -x_2$, esto significa f no es inyectiva.

NOTA: gráficamente, se puede determinar si una función es inyectiva o no, trazando rectas paralelas al eje x. Si alguna de estas cortas la gráfica de la función en dos o más o puntos, la función no es inyectiva. Si toda recta paralela al eje x corta a la gráfica en un solo punto o no lo corta, la función es inyectiva.

Ejemplos

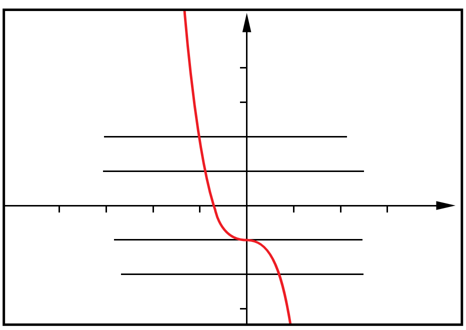


Figura 5.42. Función f inyectiva

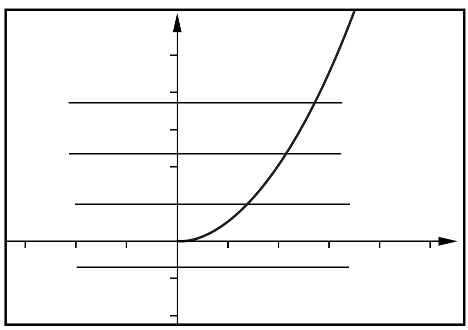


Figura 5.43. Función g inyectiva

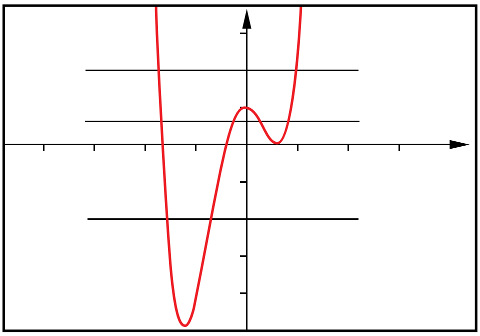


Figura 5.44. Función *h* no inyectiva

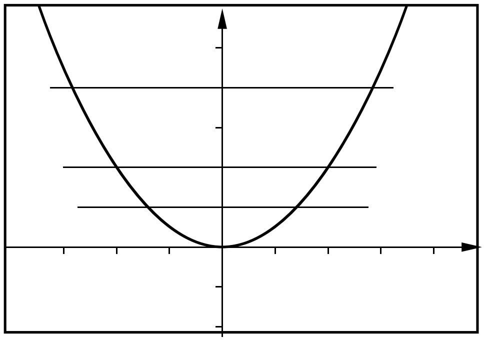


Figura 5.45. Función *l* no inyectiva

5.5. Función sobreyectiva

Definición 5.7. Sea f $A \to B$ una función, se dice que f es sobreyectiva si y solo sí: $\forall$ y $\in B$ $\exists$ x $\in A$ tal que $y = f(x)$. Es decir, f es sobreyectiva si no existe n en B elementos que no sean imágenes de algún elemento de A.

Ejemplo.

1. Determine si las funciones, representadas en diagramas de Venn son sobreyectivas o no.

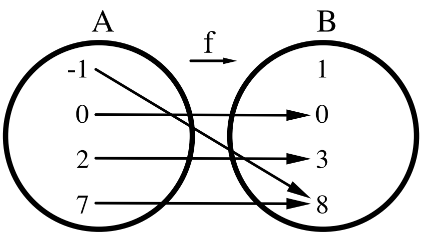


Figura 5.46. Función f definida de A en B

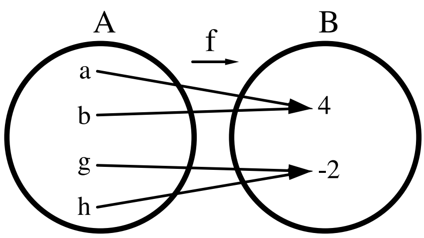


Figura 5.47. Función f definida de A en B

La función f, de la figura 5.46, no es sobreyectiva, porque 1 $\in B$ no está asociado con ningún elemento de A. La función f, de la figura 5.47, sí es sobreyectiva.

NOTA: la función f es sobreyectiva si se demuestra que el recorrido de f es igual al conjunto de llegada, es decir, $Rec\, f = B$

Ejemplos

Determine si las siguientes funciones son sobreyectivas, en el caso de no serlas, restringa el conjunto de llegada, de la definición de la función, para que sí lo sea.

1. $f:[-2,+\infty[\rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x)=\sqrt{x+2}$

De $y=\sqrt{x+2} \Rightarrow x=y^2-2$. El recorrido de f es $Rec\, f=\mathbb{R}$. Como el recorrido es igual al conjunto de llegada, f es sobreyectiva.

2. Sea $f:\mathbb{R}-\{-1,1\}\rightarrow\,]-\infty,0[\,\cup\,[2,+\infty[\,/\, f(x)=\dfrac{1}{x+1}\quad\dfrac{1}{x-1}$

Para hallar el recorrido de: $y=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$ despejamos x :

$$y=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{-2}{(x+1)(x-1)} \quad\Rightarrow\quad y(x^2-1)=-2 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{\frac{-2+y}{y}}$$

Para que la raíz exista: $\dfrac{-2+y}{y}\geq 0$

$-\infty$	0	2	$+\infty$
$-2+y$	-	-	+
y	-	+	+
$\frac{-2+y}{y}$	+	-	+

Tabla 5.2. La tabla muestra los intervalos de solución de la inecuación.

La solución de la desigualdad es $]-\infty,0[\,\cup\,[2,+\infty[$

Por lo tanto, el recorrido de f es: $Rec\, f=\,]-\infty,0[\,\cup\,[2,+\infty[$. Verifique la solución obtenida analizando la gráfica de la función (ver figura 5.48).

Finalmente, como el recorrido es igual al conjunto de llegada, f es sobreyectiva.

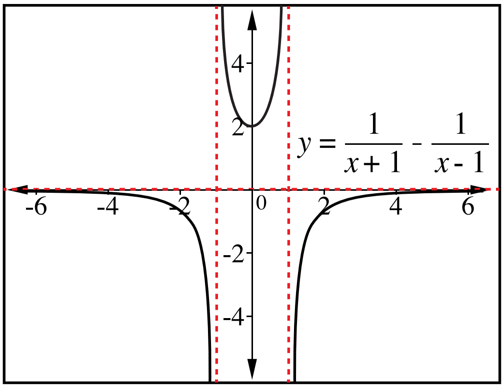


Figura 5.48. Gráfica de función del ejemplo 2

3. Sea $f : R - \{-3,0\} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \dfrac{x}{x+3} + \dfrac{3-x}{x}$

De $y = \dfrac{x}{x+3} + \dfrac{3-x}{x}$, despejemos x : $y = \dfrac{x}{x+3} + \dfrac{3-x}{x} \Rightarrow y\, x(x+3) = x^2 + 9 - x^2$

obteniéndose $x = \dfrac{-3y \pm \sqrt{9y^2 + 36y}}{2y}$, por la raíz, $9y^2 + 36y \geq 0$ y $2y \neq 0$

Analicemos la inecuación: $9y^2 + 36y \geq 0 \Rightarrow 9y\,(y+4) \geq 0$

$-\infty$	-4	0	$+\infty$
y	-	-	+
$y+4$	-	+	+
$y(y+4)$	+	-	+

Tabla 5.3. La tabla muestra los intervalos de solución de la inecuación

La solución de la desigualdad es: $]-\infty,-4] \cup]0,+\infty[$

Por lo tanto, el recorrido de f es: $Rec\, f =]-\infty,-4] \cup]0,+\infty[$, constate su solución analizando la gráfica de la función (ver figura 5.49).

Finalmente, como el recorrido no es igual al conjunto de llegada de f , ésta no es sobreyectiva.

Para que f sea sobreyectiva, debe estar definida de la siguiente manera:

$f : \mathbb{R} - \{-3,0\} \to]-\infty,-4] \cup]0,+\infty[$

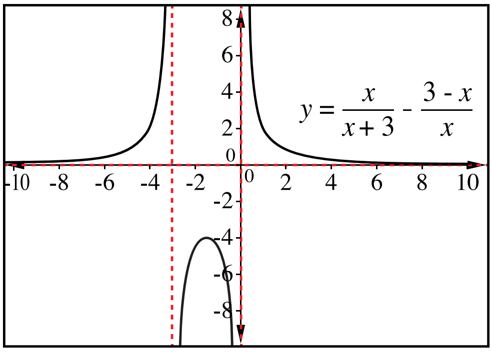


Figura 5.49. Gráfica de función del ejemplo 3

4. A partir de la gráfica de la función, halle domino, recorrido y determine si es inyectiva o sobreyectiva.

4.1 A partir del análisis de la gráfica de la función (ver figura 5.50), el dominio de la función son los reales y el recorrido el intervalo $[-4, 4]$

Por la gráfica la función es inyectiva. Para que sea sobreyectiva la función debe estar definida de la siguiente manera: $f: \mathbb{R} \rightarrow [-4,4]$

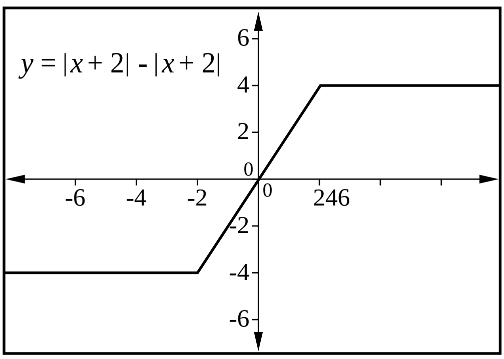


Figura 5.50. Gráfica de función del ejemplo 4.1

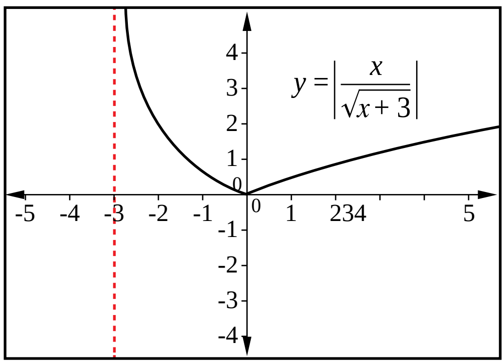


Figura 5.51. Gráfica de función del ejemplo 4.2

4.2. A partir del análisis de la gráfica de la función (ver figura 5.51), el dominio de la función es el intervalo $]-3, \infty[$ y el recorrido es de $[0, \infty[$

Por la gráfica, la función no es inyectiva; para que sea sobreyectiva, la función debe estar definida de la siguiente manera: $f:]-3, \infty[\rightarrow [0, \infty[$

5.6. Función biyectiva

Definición 5.8. Sea $f: A \to B$ una función, se dice que f es biyectiva si y solo sí, es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplos

1. Sea $f: \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ con $f(x) = \dfrac{-1+x}{2x+1}$

Veamos, si es inyectiva, probemos que: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{-1+x_1}{2x_1+1} = \frac{-1+x_2}{2x_2+1}$$

$$(-1+x_1)(2x_2+1) = (-1+x_2)(2x_1+1)$$

$$-2x_2 + x_1 = -2x_1 + x_2 \Leftrightarrow -3x_2 = -3x_1 \Leftrightarrow x_2 = x_1$$

Para probar la sobreyectividad, el recorrido de f debe coincidir con el conjunto de llegada. De $y = \dfrac{-1+x}{2x+1}$ despejamos la variable x, y se obtiene $x = \dfrac{-1-y}{2y-1}$, por lo tanto el $Rec\ f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Como el recorrido de la función coincide con el conjunto de llegada, la función f es sobreyectiva. En conclusión, la función es biyectiva (ver figura 5.52).

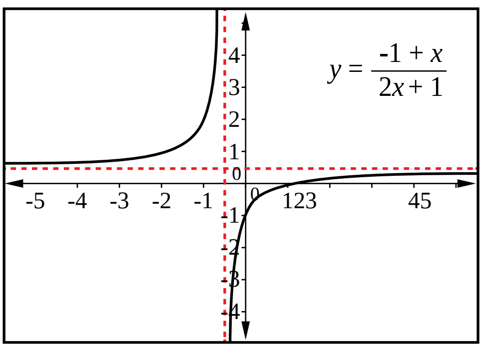


Figura 5.52. Gráfica de función del ejemplo 1

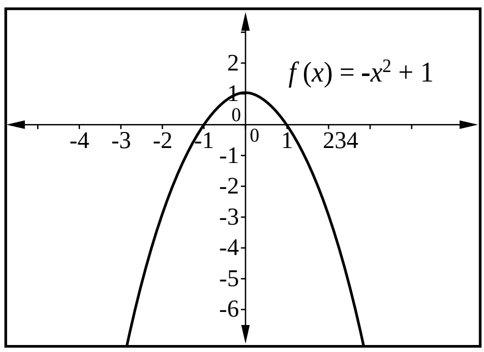


Figura 5.53. Gráfica de función del ejemplo 2

2. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty,1]$ con $f(x) = -x^2 + 1$

Veamos si es inyectiva, probemos que: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x\ ) \Rightarrow -x^2{}_1 + 1 = -x^2{}_2 + 1 \Rightarrow x^2{}_1 = x^2{}_2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$ o $x_1 = -x_2$

Entonces, la función no es inyectiva. Para la sobreyectividad determinamos el recorrido. Si este coincide con el conjunto de llegada, la función será sobreyectiva.

Para el recorrido de $y = -x^2 + 1$, despejamos x, obteniéndose $x = \pm\sqrt{1-y}$ Como $1 - y \geq 0$, implica que $y \leq 1$. Entonces el Rec $f =]-\infty,1]$.

Dado que el recorrido de f coincide con el conjunto de llegada de f, se concluye que f es sobreyectiva. Como f no es inyectiva, pero si sobreyectiva, entonces f no es biyectiva (ver figura 5.53).

NOTA: para que la función $f(x) = -x^2 + 1$ sea inyectiva, se puede restringir el dominio (conjunto de salida) de la siguiente manera (ver figuras 5.54 y 5.55).

Restricción 1: $f: [0, +\infty[\rightarrow]-\infty, 1]$

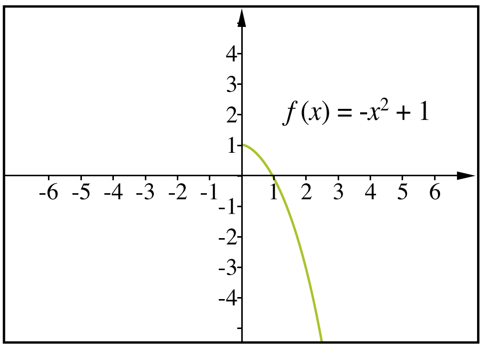


Figura 5.54. Gráfica de función con la restricción 1

Restricción 2: $f: [-\infty,0[\rightarrow]-\infty, 1]$

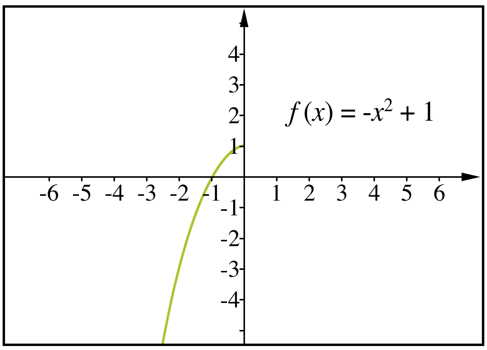


Figura 5.55. Gráfica de función con la restricción 2

Cualesquiera de las restricciones realizadas, garantiza la biyectividad de la función.

Definición 5.8. Sea $f: A \to B$ una función biyectiva, definimos la función inversa de f como la aplicación $f^{-1}: B \to A$ (ver figura 5.56).

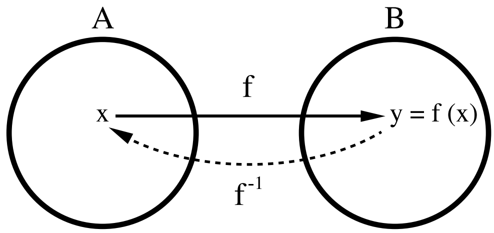


Figura 5.56. Representación de la ley f y su inversa

Ejemplos

Dadas las siguientes funciones, hallar su inversa.

1. Sea $f = \{(1,4); (2,5); (3,6); (4,7); (5,8)\}$ una función biyectiva.

Su inversa es: $f^{-1} = \{(4,1); (5,2); (6,3); (7,4); (8,5)\}$

2. Sea $g = \{(2,7); (3,8); (4,9); (5,10); (6,11)\}$ una función biyectiva.

Su inversa es: $g^{-1} = \{(7,2); (8,3); (9,4); (10,5); (11,6)\}$

3. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 5$. Determina su inversa.

Se puede demostrar con facilidad que f es biyectiva; por tanto, admite inversa. La misma que la obtenemos despejando x de $y = x - 5$. Por tanto, su inversa es: $f^{-1}(y) = y + 5$

Para construir la gráfica de la función inversa, se debe cambiar x por y, es decir, graficamos $f^{-1}(x) = x + 5$ (ver figura 5.57).

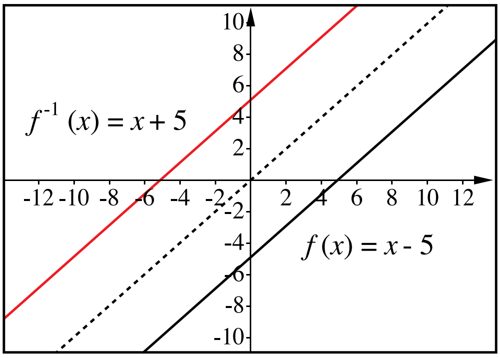


Figura 5.57. Gráfica de función inversa de ejemplo 3

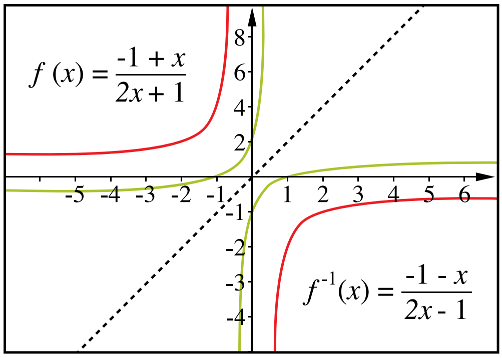


Figura 5.58. Gráfica de función inversa de ejemplo 4

4. Sea $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ con $f(x) = \dfrac{-1+x}{2x+1}$

Como ya se demostró anteriormente, la función dada es biyectiva (ver figura 5.58). La función inversa de f está definida de la siguiente manera:

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \text{ tal que } f^{-1}(x) = \frac{-1-x}{2x-1}$$

5. Sea $f : [0,+\infty[\rightarrow]-\infty,1]$ con $f(x) = -x^2 + 1$

Con las condiciones dadas la función es biyectiva. Su inversa está definida como: $f^{-1} :]-\infty, 1] \rightarrow [0, +\infty[$, con $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$ (ver en figura 5.59).

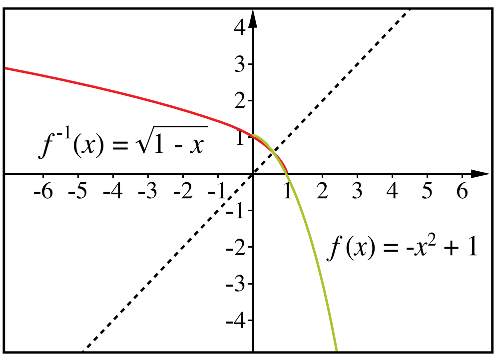


Figura 5.59. Gráfica de función inversa de ejemplo 5

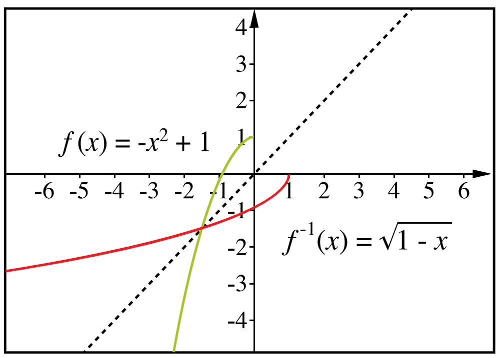


Figura 5.60. Gráfica de función inversa de ejemplo 6

6. Sea $f:[-\infty,0\,[\rightarrow]-\infty,1]$ con $f(x)=-x^2+1$

Con las condiciones dadas, la función es biyectiva. Su inversa está definida como:

$f^{-1}:\,]-\infty,1]\rightarrow]-\infty,0[$, con $f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x}$, (ver en figura 5.60)

NOTA: las gráficas de f y f^{-1} son simétricas con respecto a la recta $y = x$

5.8. Función compuesta

Definición 5.9. Sean A, B y C subconjuntos de $\mathbb{R}$ y las funciones: $f: A\rightarrow B$ tal que $y=f(x)$ y $g: B\rightarrow C$ tal que $z=g(y)$. La función $g\circ f: A\rightarrow C$ es la función definida por $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ (Ver figura 5.61).

NOTA: la condición necesaria para que exista $g\circ f$ se lee " g compuesta con f", es que el conjunto de llegada de f tiene que ser un subconjunto del conjunto de salida de g , es decir: $Rec\,(f)\subseteq Dom\,(g)$ (ver figura 5.61).

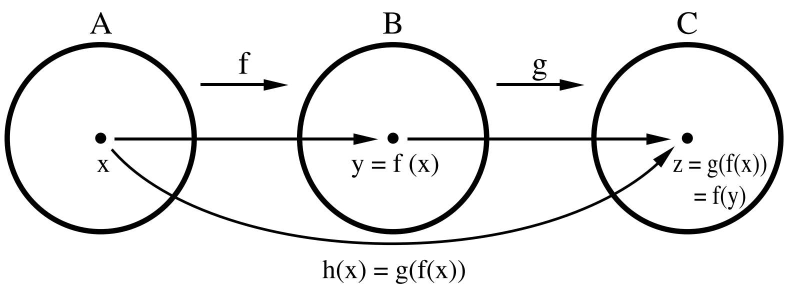


Figura 5.61. Representación de la composición de funciones

Ejemplos

1. Si $f(x)=3x^2-2$ y $g(x)=x^3+x-2$, halle $g\circ f$ y $f\circ g$ si existen.

Primero hallemos dominios y recorridos de las funciones dadas:

Dom $f=\mathbb{R}$, Dom $g=\mathbb{R}$,

Rec $f=[-2,+\infty[$ y Rec $g=\mathbb{R}$.

Como $Rec\,(f)\subseteq Dom\,(g)$ y $Rec\,(g)\subseteq Dom\,(f)$ existen $g\circ f$ y $f\circ g$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2-2) = (3x^2-2)^3 + (3x^2-2) - 2 = 27x^6 - 54x^4 + 39x^2 - 12$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3+x-2) = 3\,(x^3+x-2)^2 - 2 = 27x^4 + 18x^3 - 33x^2 - 12x + 10$

2. Si $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$ y $g(x)=\sqrt{x^2+2}$ halle $g\circ f$ y $f\circ g$ si existen.
Primero hallemos dominios y recorridos de las funciones dadas:

$Dom\, f = \mathbb{R}-\{-1,1\}$, $\qquad$ Dom g $= \mathbb{R}$,

$Rec\, f = \,]-\infty,0[\, \cup [2,+\infty[$ $\qquad$ y $\qquad$ $Rec\, g = [2,+\infty[$

Como $Rec\,(f) \subseteq Dom\,(g)$ y $Rec\,(g) \subseteq Dom\,(f)$ existen $g\circ f$ y $f\circ g$

$$(g\circ \mathrm{f})(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)^2+2}$$

$$(f\circ \mathrm{g})(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x^2+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}-1} = \frac{2\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}$$

3. Si $\mathrm{f(x)}=\begin{cases} 2, & |\mathrm{x}|\le 2 \\ -1, & |\mathrm{x}|>2 \end{cases}$ $\quad$ $\mathrm{g(x)}=\begin{cases} 5-\mathrm{x}^3, & |\mathrm{x}|\le 3 \\ -1, & |\mathrm{x}|>3 \end{cases}$ halle $g\circ f$ y $f\circ g$ si existen.

Hallemos dominios y recorridos de las funciones dadas:

$Dom\, f = \mathbb{R}$ $\qquad$ $Dom\, g = \mathbb{R}$

$Rec\, f = \{-1,2\}$ $\qquad$ y $\qquad$ $Rec\, g = \{-22,32\}$

Como $Rec\,(f) \subseteq Dom\,(g)$ y $Rec\,(g) \subseteq Dom\,(f)$ existen $g\circ f$ y $f\circ g$.
Determinemos $g\circ f$

$$(g\circ \mathrm{f})(x) = g\big(f(x)\big) = \begin{cases} 5-f^3(x), & |f(x)|\le 3 \\ -1, & |f(x)|>3 \end{cases}$$

$$(g \circ \mathrm{f})(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 5-2^3, & |2| \le 3 \wedge |x| \le 2 \\ 5-(-1)^3, & |-1| \le 3 \wedge |x| > 2 \\ -1, & |2| > 3 \\ -1, & |2| > 3 \end{cases}$$

Como $|2|\le 3$ y $|-1| \le 3$ son verdaderos y $|2| > 3$ es falso, entonces:

$(g \circ \mathrm{f})(x) = \begin{cases} -3, & |x| \le 2 \\ 6, & |x| > 2 \end{cases}$, su gráfica (ver en figura 5.62).

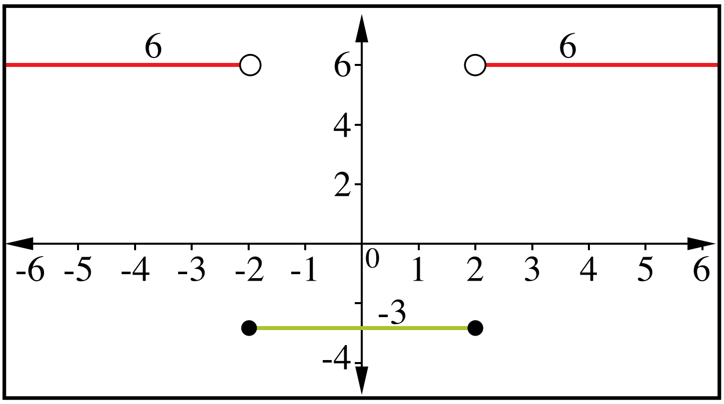


Figura 5.62. Representación gráfica de la composición $g \circ f$

Ahora determinemos $\mathrm{f} \circ \mathrm{g}$

$$(f \circ \mathrm{g})(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2, & |g(x)| \le 2 \\ -1, & |g(x)| > 2 \end{cases}$$

$$(f \circ \mathrm{g})(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2, & |5-x^3| \le 2 \ \wedge \ |x| \le 3 \\ 2, & |-1| \le 2 \ \wedge \ |x| > 3 \\ -1, & |5-x^3| > 2 \ \wedge \ |x| \le 3 \\ -1, & |-1| > 2 \ \wedge \ |x| > 3 \end{cases}$$

La solución de $|5-x^3|\le 2\wedge|x|\le 3$ es $[\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{7}]$, de $|-1|\le 2\wedge|x|>3$ es $|x|>3$, de $|5-x^3|>2\wedge|x|\le 3$ es $\left[-3,\sqrt[3]{3}\right[\ \left]\sqrt[3]{7},3\right]$ y $|-1|>2\wedge|x|>3$ es el vacío, entonces:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}2, & |x|>3\\ 2, & \sqrt[3]{3}\le x\le\sqrt[3]{7}\\ -1, & -3\le x<\sqrt[3]{3}\ \vee\ \sqrt[3]{7}<x\le 3\end{cases}$$

, su gráfica, ver figura

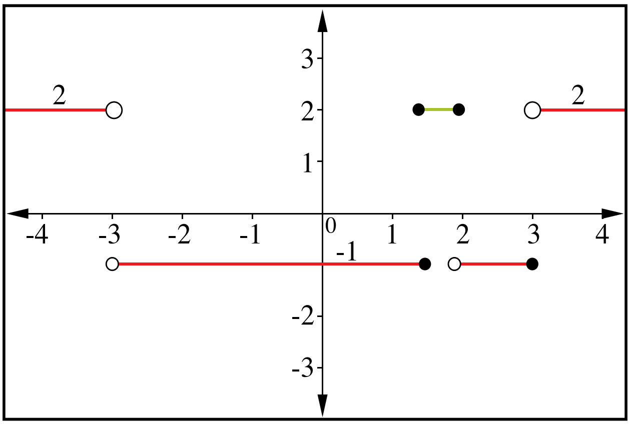


Figura 5.63. Representación gráfica de la composición *f* o *g*

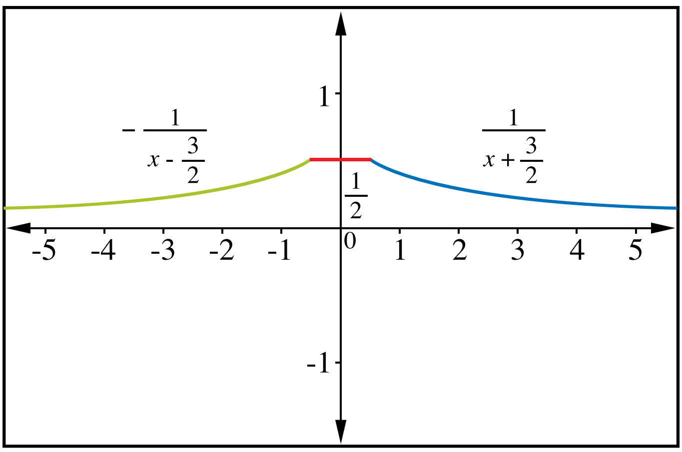


Figura 5.64. Representación gráfica de la función *f(x)* del ejemplo 4

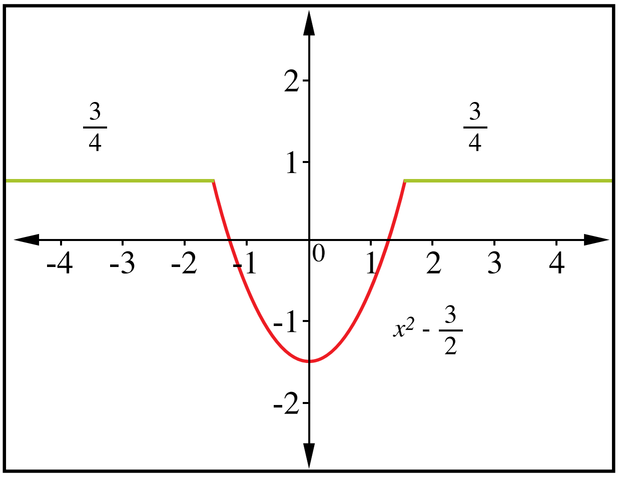


Figura 5.65. Representación gráfica de la función *g(x)* del ejemplo 4

4. Si $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{2x-3}, & x<-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & |x|\leq\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{2x+3}, & x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{4}, & |x|>\dfrac{3}{2} \\ x^2-\dfrac{3}{2}, & |x|\leq\dfrac{3}{2} \end{cases}$,

ver figuras 5.64 y 5,65 respectivamente. Halle $g\circ f$ y $f\circ g$ si existen.

Hallemos los dominios y recorridos de cada una de las funciones dadas:

$Dom\, f=\mathbb{R}$,

$Dom\; g=\mathbb{R}$,

$$Rec\;\; f=\left]0,\frac{1}{2}\right] \text{ y } Rec\;\; g=\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right]$$

Como $Rec\,(f)\subseteq Dom\,(g)$ y $Rec\,(g)\subseteq Dom\,(f)$. Hallemos $f\circ g$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -\dfrac{2}{2g(x)-3}, & g(x) < -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & |g(x)| \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{2g(x)+3}, & g(x) > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -\dfrac{2}{2\left(\dfrac{3}{4}\right)-3}, & \dfrac{3}{4} < -\dfrac{1}{2} \ \wedge \ |\mathrm{x}| > \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{2}{2\left(x^2-\dfrac{3}{2}\right)-3}, & x^2-\dfrac{3}{2} < -\dfrac{1}{2} \ \wedge \ |\mathrm{x}| \leq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & \left|\dfrac{3}{4}\right| \leq \dfrac{1}{2} \ \wedge \ |\mathrm{x}| > \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & \left|x^2-\dfrac{3}{2}\right| \leq \dfrac{1}{2} \ \wedge \ |\mathrm{x}| \leq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{2\left(\dfrac{3}{4}\right)+3}, & \dfrac{3}{4} > \dfrac{1}{2} \ \wedge \ |\mathrm{x}| > \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{2\left(x^2-\dfrac{3}{2}\right)+3}, & x^2-\dfrac{3}{2} > \dfrac{1}{2} \ \wedge \ |\mathrm{x}| \leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}, & \dfrac{3}{4} < -\dfrac{1}{2} \ \wedge \ |\mathrm{x}| > \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{2}{x^2-6}, & x^2-\dfrac{3}{2} < -\dfrac{1}{2} \ \wedge \ |\mathrm{x}| \leq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & \left|\dfrac{3}{4}\right| \leq \dfrac{1}{2} \ \wedge \ |\mathrm{x}| > \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & \left|x^2-\dfrac{3}{2}\right| \leq \dfrac{1}{2} \ \wedge \ |\mathrm{x}| \leq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{4}{9}, & \dfrac{3}{4} > \dfrac{1}{2} \ \wedge \ |\mathrm{x}| > \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x^2}, & x^2-\dfrac{3}{2} > \dfrac{1}{2} \ \wedge \ |\mathrm{x}| \leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

La solución de $\frac{3}{4} < -\frac{1}{2} \ \wedge \ |x| > \frac{3}{2}$ es vacío, de $x^2 - \frac{3}{2} < -\frac{1}{2} \ \wedge \ |x| \le \frac{3}{2}$ es $\left]-1,1\right[$, de $\left|\frac{3}{4}\right| \le \frac{1}{2} \ \wedge \ |x| > \frac{3}{2}$ es vacío, de $\left|x^2 - \frac{3}{2}\right| \le \frac{1}{2} \ \wedge \ |x| \le \frac{3}{2}$ es $\left[-\sqrt{2},-1\right] \cup \left[1,\sqrt{2}\right]$ de $\frac{3}{4} > \frac{1}{2} \ \wedge \ |x| > \frac{3}{2}$ es $|x| > \frac{3}{2}$, y de $x^2 - \frac{3}{2} > \frac{1}{2} \ \wedge \ |x| \le \frac{3}{2}$ es $\left[-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right]$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x^2-6}, & x \in \left]-1,1\right[\\ \dfrac{1}{2}, & x \in \left[-\sqrt{2},-1\right] \quad \left[1,\sqrt{2}\right] \\ \dfrac{4}{9}, & x \in \left]-\infty,-\dfrac{3}{2}\right[\quad \left]\dfrac{3}{2},\infty\right[\\ \dfrac{1}{x^2}, & x \in \left[-\dfrac{3}{2},-\sqrt{2}\right[\quad \left]\sqrt{2},\dfrac{3}{2}\right] \end{cases}$$

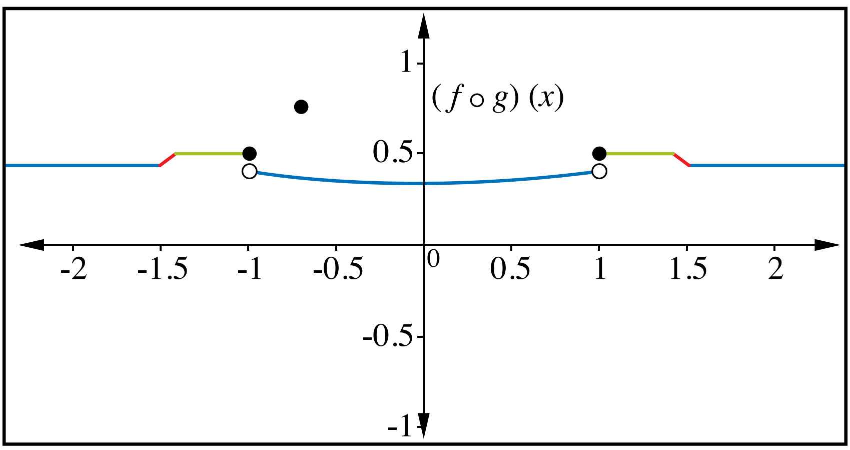


Figura 5.66. Representación gráfica de la composición $f \circ g$

El cálculo de $g \circ f$ se deja como ejercicio al lector.

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{5}{x}, & x<-1\\ 5, & |x|\le 1\\ \dfrac{5}{x}, & x>1\end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases}13, & |x|>3\\ 2x^2-5, & |x|\le 3\end{cases}$$

figuras 5.67 y 5.68 respectivamente. Halle $f\circ g$ y $g\circ f$ si existen.

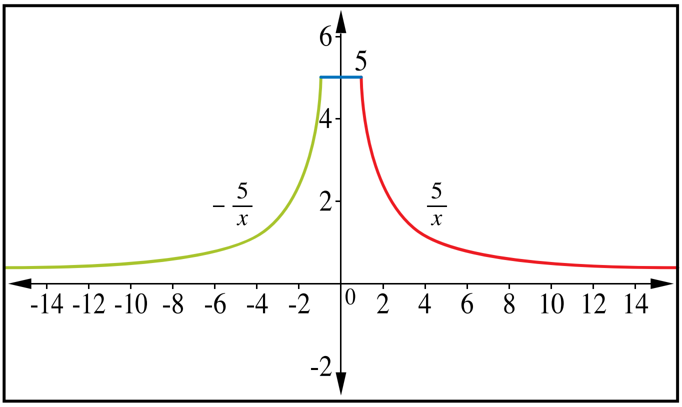


Figura 5.67. Representación gráfica de la función *f(x)* del ejemplo 5

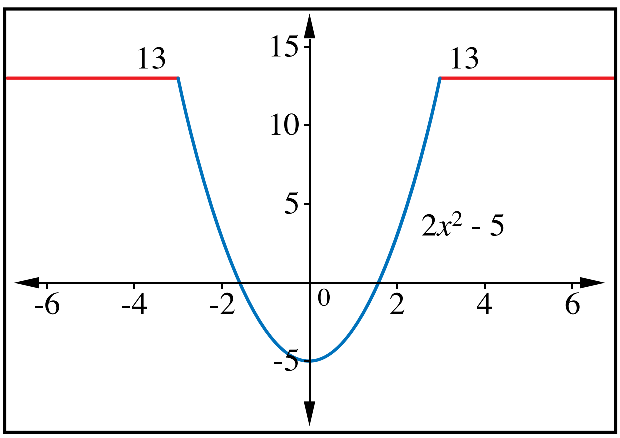


Figura 5.68. Representación gráfica de la función *g(x)* del ejemplo 5

$Dom\, f = \mathbb{R}$, $Rec\, f =]\, 0{,}5]$, $Dom\, g = \mathbb{R}$ y $Rec\, g = [-5{,}13]$.

Como $Rec\,(f) \subseteq Dom\,(g)$ y $Rec\,(g) \subseteq Dom\,(f)$. Hallemos $f \circ g$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -\dfrac{5}{g(x)}, & g(x) < -1 \\ 5\,, & |g(x)| \leq 1 \\ \dfrac{5}{g(x)}, & g(x) > 1 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -\dfrac{5}{13}, & 13 < -1 \ \wedge\ |x| > 3 \\ -\dfrac{5}{2x^2-5}, & 2x^2 - 5 < -1 \ \wedge\ |x| \leq 3 \\ 5\,, & |13| \leq 1 \ \wedge\ |x| > 3 \\ 5\,, & |2x^2 - 5| \leq 1 \ \wedge\ |x| \leq 3 \\ \dfrac{5}{13}, & 13 > 1 \ \wedge\ |x| > 3 \\ \dfrac{5}{2x^2-5}, & 2x^2 - 5 > 1 \ \wedge\ |x| \leq 3 \end{cases}$$

La solución de $13 < -1 \wedge |x| > 3$ es vacía, la de $2x^2 - 5 < -1 \wedge |x| \leq 3$ es $|x| < \sqrt{2}$ de $|13| \leq 1 \wedge |x| > 3$ es vacía, de $|2x^2 - 5| \leq 1 \wedge |x| \leq 3$ es $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}$ de $13 > 1 \wedge |x| > 3$ es $|x| > 3$ y de $2x^2 - 5 > 1 \wedge |x| \leq 3$ es $\{-3, 3\}$. Entonces:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -\dfrac{5}{2x^2-5}, & -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ 5\,, & -\sqrt{3} \leq x \leq -\sqrt{2} \ \wedge\ \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3} \\ \dfrac{5}{13}, & -\infty < x < -3 \wedge\ 3 < x < \infty \\ \dfrac{5}{2x^2-5}, & -3 \leq x < -\sqrt{3} \ \wedge\ \sqrt{3} < x \leq 3 \end{cases}$$

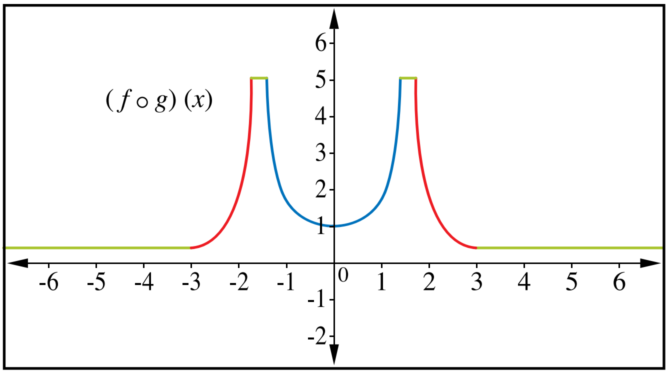


Figura 5.69. Representación gráfica de la composición $f \circ g$

EJERCICIOS PROPUESTOS 5.2

1. ¿La función f definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^3 - x^2 + 1$, es biyectiva?

2. Halle el conjunto B para que la función f sea biyectiva, dado que:

$$f: \mathbb{R} - \{0\} \to B \,/\, f(x) = -2x^3 - \frac{1}{x}$$

3. Demuestre que la función f definida por $f:]-\infty, 5[\,\to\,]-\infty, 0[\,/\, f(x) = \dfrac{1}{x-5}$ es biyectiva y halle su inversa.

4. Halle el conjunto C para que la función f sea sobreyectiva, dado que:

$$f:]2, +\infty[\to C \,/\, f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$$

5. La función f definida por $f: \mathbb{R} - \{4\} \to \{-1, 1\} \,/\, f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}{x-4}$ ¿Es sobreyectiva?

6. Demuestre que la función f definida por $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{-1\} \,/\, f(x) = \dfrac{2\quad x}{x+1}$ es biyectiva y halle su inversa.

7. Halle los conjuntos A y B para que la función f definida por, $f:A \to B \,/\, f(x) = \dfrac{-1+x}{2x+1}$ sea biyectiva y halle su inversa.

8. Define el conjunto A para que la función f sea inyectiva, dado que: $f:A \to \left[-2{,}5{,}1\right[\,/\, f(x) = \dfrac{-25+x^2}{x^2+10}$

9. ¿La función $f:\left[-2{,}+\infty\right[\to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+2}}$ es biyectiva?

10. Determinar si la función f definida por: $f:[0,+\infty[-\{1\} \to \,]-\infty\,,0[\,\cup\,[\,2,+\infty\,] \,/\, \mathrm{f(x)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$ es biyectiva, caso verdadero, halle su inversa.

11. Halle los conjuntos C y D para que la función f definida por $f: C \to D \,/\, \mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}+3} + \dfrac{3-\mathrm{x}}{\mathrm{x}}$ sea biyectiva y halle su inversa.

12. Halle la inversa de $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{x}} & ,\, \mathrm{x} \leq 0 \\ \mathrm{x}+1 & ,\, \mathrm{x} > 0 \end{cases}$ y grafíquelas en el mismo plano.

13. Halle la inversa de la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \ln(\mathrm{x}) & ,\, \mathrm{x} \geq 2 \\ \dfrac{7}{10}\mathrm{x} - \ln(2) & ,\, \mathrm{x} < 2 \end{cases}$ y grafique las funciones en el mismo plano.

14. Halle la inversa de la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\mathrm{x}} & ,\, \mathrm{x} \geq 0 \\ \mathrm{x}^3 & ,\, \mathrm{x} < 0 \end{cases}$ y grafique las funciones en el mismo plano.

15. Si $\mathrm{f(x)} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+2}}$ y $\mathrm{g(x)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$ halle $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$ en caso de que existan.

16. Halle la inversa de la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{125}x^3 & , x \leq -2 \\ x-2 & , -2 < x < 2 \\ \frac{1}{4}x^2+3 & , x > 2 \end{cases}$

grafique las funciones en el mismo plano.

17. Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x - 2$.Halle $(gof)(x)$ y $(fog)(x)$ en caso de que existan.

18. Dadas las funciones: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ x^3 & , x < 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{125}x^3 & , x \leq -2 \\ x-2 & , -2 < x < 2 \\ \frac{1}{4}x^2+3 & , x > 2 \end{cases}$

Halle $(g_o f)(x)$ y $(f_o g)(x)$ en caso de que existan.

19. Si $f(x) = \begin{cases} e^x & , x \leq 0 \\ x+1 & , x > 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} \ln(x) & , x \geq 2 \\ \frac{7}{10}x - \ln(2) & , x < 2 \end{cases}$, halle

$(g_o f)(x)$ $(f_o g)(x)$ y en caso de que existan.

20. Si $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{-1+x}{2x+1}$ halle $(g_o f)(x)$ y $(f_o g)(x)$ si existen.

5.9. Funciones reales

FUNCIÓN CONSTANTE

Es una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$

Ejemplos.

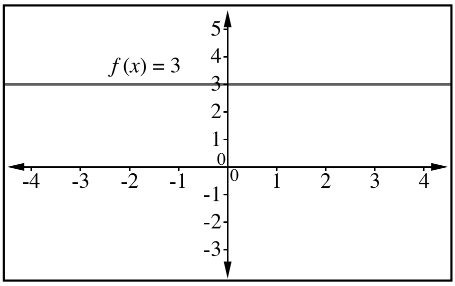


Figura 5.70. Gráfica de la función $f(x)$=3

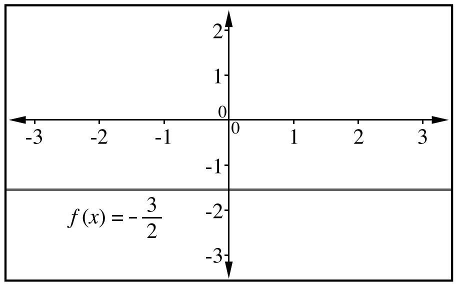


Figura 5.71. Gráfica de la función $f(x)$= -3/2

FUNCIÓN POLINOMIAL

Es una función f: R→R / $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$, donde n es el grado del polinomio y es un entero no negativo, y $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ son números reales.

Ejemplos

1. $f(x) = -x^4 - 3x^2 + x - 1$

2. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

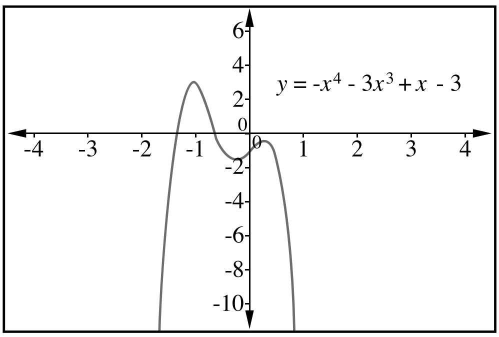


Figura 5.72. Gráfica de función ejemplo 1

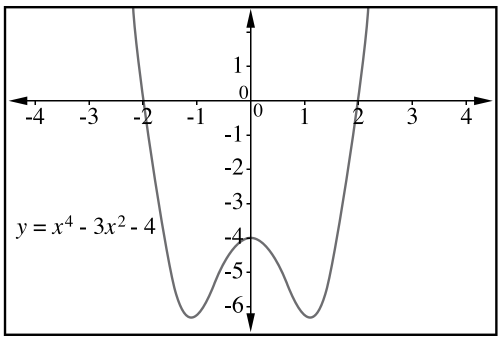


Figura 5.73. Gráfica de función ejemplo 2

FUNCIÓN RACIONAL

Es aquella que es expresada como un cociente de funciones polinomiales.

Ejemplos

1. $f(x)=\dfrac{x^3-x+2}{x^2-2}$ 2. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

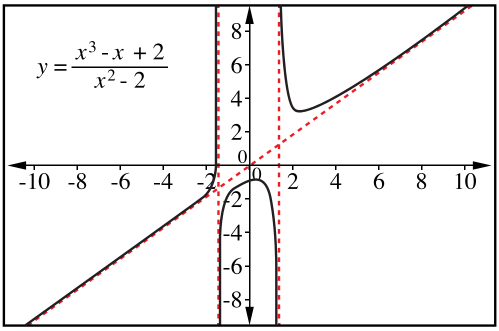


Figura 5.74. Gráfica de función ejemplo 1

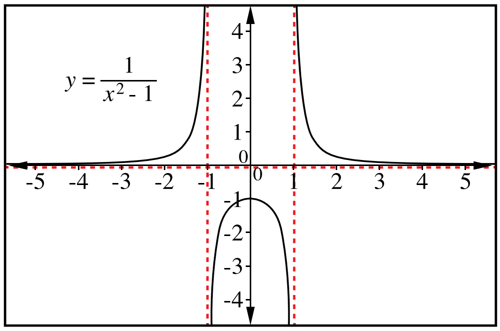


Figura 5.75. Gráfica de función ejemplo 2

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

La función $f(x)$ que representa el valor absoluto de x , está definido por:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

Ejemplos

1. Sea $f(x)=|2x+6|=\begin{cases} 2x+6 \ , & 2x+6\geq 0 \\ -2x-6 \ , & 2x+6<0 \end{cases}$ esto implica que ,

$f(x)=\begin{cases} 2x+6 \ , & x\geq -3 \\ -2x-6 \ , & x<-3 \end{cases}$ su gráfica,se puede ver en la figura 5.76.

2. Sea $f(x)=\dfrac{|x-1|}{|x+3|}=\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+3} \ , & \dfrac{x-1}{x+3}\geq 0 \\ -\dfrac{x-1}{x+3} \ , & \dfrac{x-1}{x+3}<0 \end{cases}$, esto implica que:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-3} \ , & x\in\left]-\infty,-3\right[\cup\left[1,\infty\right[\\ -\dfrac{x-1}{x+3}, & x\in\left]-3,1\right[\end{cases}$$

La gráfica de *f(x)*, se ve en la figura 5.77.

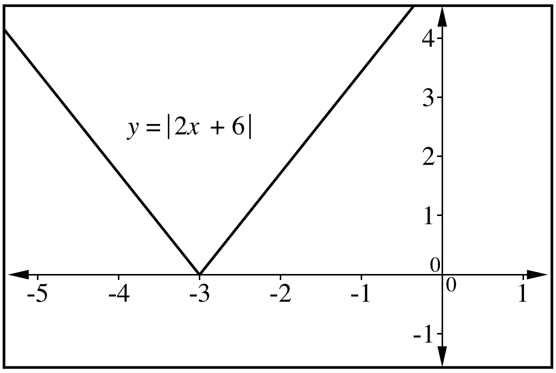


Figura 5.76. Gráfica de función valor absoluto del ejemplo 1

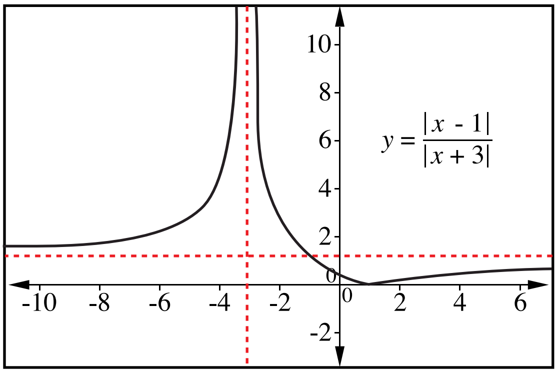


Figura 5.77. Gráfica de función valor absoluto del ejemplo 2

5.10. Operaciones con funciones

Sea $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, f y g funciones reales de A en $\mathbb{R}$, es decir: f :A$\rightarrow$ $\mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$, y g :$A \rightarrow$ $\mathbb{R}$ tal que $y = g(x)$

Definimos entre f y g las siguientes operaciones:

1. Llamamos función suma de f con g a la función definida por: $(f + g)$:A$\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $(f + g)(\mathrm{x}) = f(x) + g(x)$

2. Llamamos función diferencia de f con g a la función definida por:

$(f-g):A\to\mathbb{R}$ tal que $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

3. Llamamos función producto de f con g a la función definida por:

$(f.g):A\to\mathbb{R}$ tal que $(f.g)(x)=f(x)\,g(x)$

4. Llamamos función cociente de f con g a la función definida por: $\left(\frac{f}{g}\right):A\to\mathbb{R}$ tal que $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad g(x)\neq 0$

TEOREMAS 5.1. Sean f y g funciones reales, entonces:

a) $\mathrm{Dom}(f+g)=\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)$

b) $\mathrm{Dom}(f-g)=\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)$

c) $\mathrm{Dom}(f.g)=\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)$

d) $\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right)\ \mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)-x/g(x)=0$

Ejemplos

1. Sean las funciones $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definidas por: $f(x)=4x^4-3x^2-5x-2$ y $g(x)=2x^5+5x^3+3x^2-5$

a) Definimos la suma de f y g por: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$(f+g)(x)=4x^4-3x^2-5x-2+2x^5+5x^3+3x^2-5=2x^5+4x^4+5x^3-5x-7$

El $Dom(f+g)=Dom(f)\cap Dom(g)=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

b) Definimos la resta de f y g por: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

$(f-g)(x) == 4x^4 - 3x^2 - 5x - 2 - (2x^5 + 5x^3 + 3x^2 - 5) = -2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3$

El $Dom(f-g) = Dom(f) \cap Dom(g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

c) Definimos el producto de f y g por: $(f\,.\,g)(x) = f(x).g(x)$

$(f\,.\,g)(x) = 8x^9 + 14x^7 + 2x^6 - 19x^5 - 54x^4 - 25x^3 + 9x^2 + 25x + 10$

El $\text{Dom}(f.g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

2. Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 3$ y $g(x) = x^2 - 3x + 1$

Definimos el cociente de f y g por: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}; \quad g(x) \neq 0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(\mathrm{x}) = \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 3}{x^2 - 3x + 1} = x - 3$$

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{x / x^2 - 3x + 1 = 0\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

3. Sean las funciones $f : \mathbb{R} - \{-3,3\} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 9} \quad \text{y} \quad g(x) = -\frac{2}{x - 3}$$

Halle la diferencia y el cociente entre f y g

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{3}{x^2 - 9} + \frac{2}{x - 3} = \frac{3}{(x-3)(x+3)} + \frac{2}{x-3} = \frac{2x+9}{(x-3)(x+3)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{x^2 - 9} \div \frac{2}{x - 3} = \frac{3}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x-3}{2} = \frac{3}{2(x+3)}$$

$$\text{Dom}(f - g) = \mathbb{R} - \{-3, 3\} \quad \text{y} \quad \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = [\mathbb{R} - \{-3, 3\}] \cap [\mathbb{R} - \{3\}] = \mathbb{R} - \{3\}$$

4. Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=|2x-1|$ y $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $g(x)=|x+2|+|2x-3|$

Halle la suma y el producto.

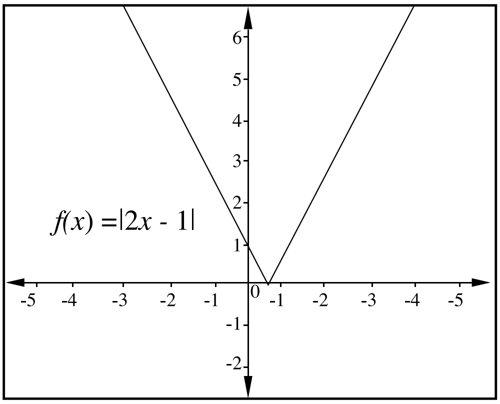


Figura 5.78. Gráfica de función *f(x)* del ejemplo 4

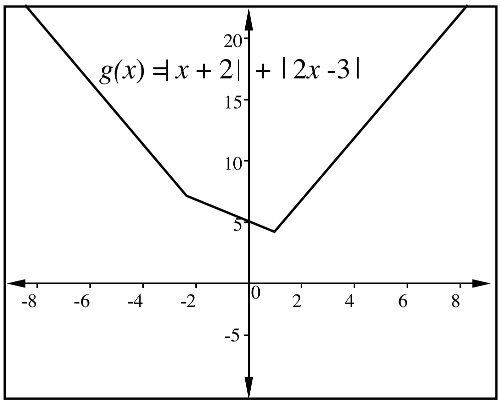


Figura 5.79. Gráfica de función *g(x)* del ejemplo 4

Por la definición de valor absoluto, de $f(x)=|2x-1|$ se obtiene:

$$f(x)=\begin{cases}-(2x-1), & 2x-1<0\\ 2x-1, & 2x-1\geq 0\end{cases}=\begin{cases}1-2x, & x<\dfrac{1}{2}\\ 2x-1, & x\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Para hallar la función equivalente de $g(x)=|x+2|+|2x-3|$, determinamos los intervalos de análisis de la función a partir de:

$$x+2=0\Rightarrow x=-2 \quad y \quad 2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2},$$

y representamos en la recta numérica.

$-\infty$	-2		$+\infty$
$x+2$	-	+	+
$2x-3$	-	-	+

Tabla 5.4. La tabla muestra los intervalos de análisis de la función *g(x)*

Los intervalos de análisis son: $]-\infty,-2[$, $\left[-2,\frac{3}{2}\right]$ y $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

En el intervalo $x<-2$ $g(x)=-(x+2)-(2x-3)=-3x+1$

En el intervalo $-2\leq x\leq\frac{3}{2}$, $g(x)=(x+2)-(2x-3)=-x+5$

En el intervalo $x>\frac{3}{2}$, $g(x)=(x+2)+(2x-3)=3x-1$

Por lo tanto, la función $g(x)$ queda definida de la siguiente manera:

$$g(x)=|x+2|+|2x-3|=\begin{cases}-3x+1, & x<-2\\ -x+5, & -2\leq x\leq\frac{3}{2}\\ 3x-1, & x>\frac{3}{2}\end{cases}$$

Como $f(x)$ y $g(x)$ son funciones definidas por partes, para determinar la suma y producto de las funciones consideramos los intervalos comunes a las dos funciones: $]-\infty,-2[$, $\left[-2,\frac{1}{2}\right[$, $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ y $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

$$(f+g)(x)=\begin{cases}(1-2x)+(-3x+1), & x<-2\\ (1-2x)+(-x+5), & -2\leq x<\frac{1}{2}\\ (2x-1)+(-x+5), & \frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}\\ (2x-1)+(3x-1), & x>\frac{3}{2}\end{cases}=\begin{cases}-5x+2, & x<-2\\ -3x+6, & -2\leq x<\frac{1}{2}\\ x+4, & \frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}\\ 5x-2, & x>\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$(f.g)(x)=\begin{cases}(1-2x)(-3x+1), & x<-2\\ (1-2x)(-x+5), & -2\leq x<\frac{1}{2}\\ (2x-1)(-x+5), & \frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}\\ (2x-1)(3x-1), & x>\frac{3}{2}\end{cases}=\begin{cases}6x^2-5x+1, & x<-2\\ 2x^2-11x+5, & -2\leq x<\frac{1}{2}\\ -2x^2+11x-5, & \frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}\\ 6x^2-5x+1, & x>\frac{3}{2}\end{cases}$$

Las gráficas del producto y la suma se muestran en las figuras 5.80 y 5.81

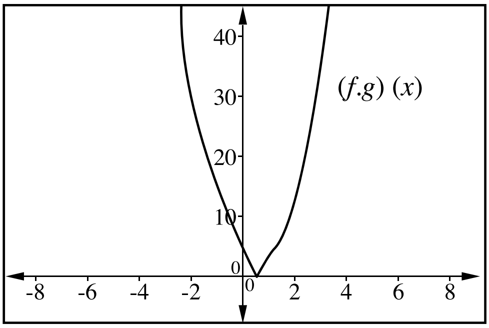


Figura 5.80. Gráfica de función *(f.g)(x)*

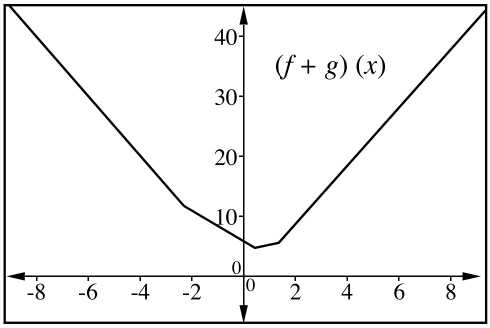


Figura 5.81. Gráfica de función *(f+g)(x)*

5.11. Monotonía de funciones reales

Definición 5.10. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. La función real f se dice que es creciente en *A* si y solo si $\forall x_1, x_2 \Rightarrow A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Ejemplos

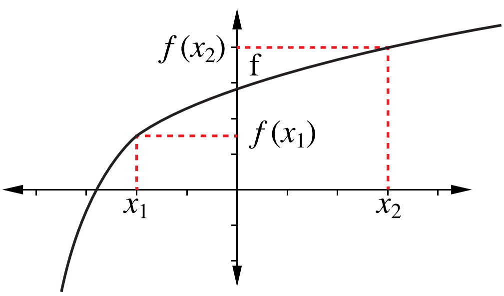


Figura 5.84. Gráfica de función *g* creciente

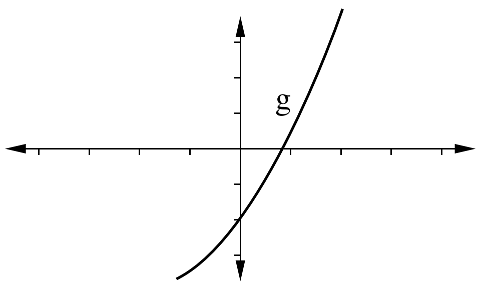


Figura 5.85. Gráfica de función *h* creciente

Definición 5.11. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. La función real f se dice que es creciente en A si y solo si $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Ejemplos

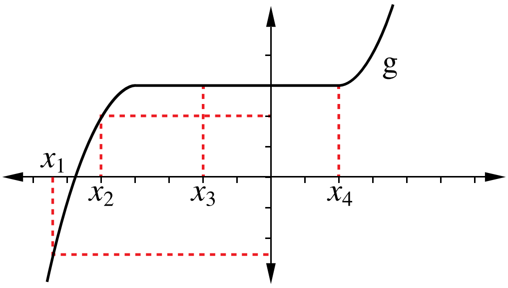


Figura 5.84. Gráfica de función g creciente

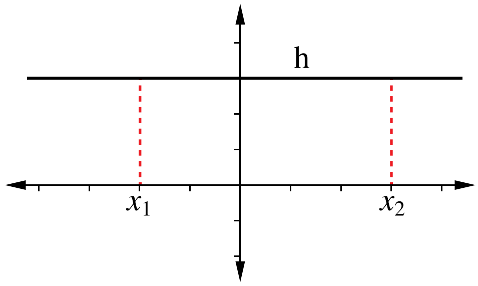


Figura 5.85. Gráfica de función h creciente

Definición 5.12. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. La función real f se dice que es creciente en A si y solo si $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Ejemplos

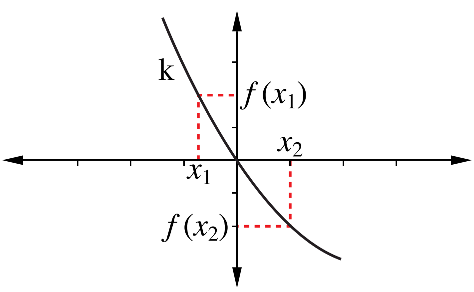


Figura 5.86. Gráfica de función k estrictamente decreciente

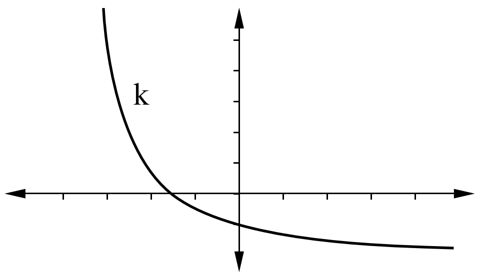


Figura 5.87. Gráfica de función k estrictamente decreciente

Definición 5.13. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. La función real f se dice estrictamente decreciente en A si y solo si $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

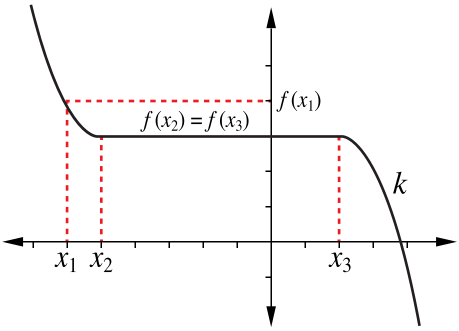


Figura 5.88. Gráfica de función f decreciente

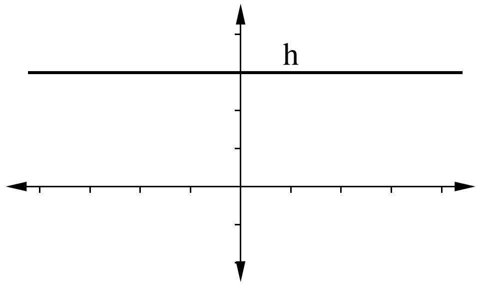


Figura 5.89. Gráfica de función h decreciente

Definición 5.14. La función real f se dice que es monótona en A si es creciente o decreciente en A.

Definición 5.15. La función real f se dice que es estrictamente monótona en A si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en A.

NOTA: una función real estrictamente monótona sobre A es monótona sobre A, el recíproco es falso.

Ejemplos

1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = ax + b \quad a,b \in \mathbb{R}$

a) Si $a > 0$, f es una función estrictamente creciente.

b) Si $a < 0$, f es una función estrictamente decreciente.

c) Si $a = 0$, f es una función constante y es creciente o decreciente.

2. Demuestre que la función f definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^3 + x - 2$ es estrictamente creciente.

f es estrictamente creciente si: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow x^3_1 < x^3_2 \Rightarrow x^3_1 - x_1 < x^3_2 - x_1 < x^3_2 - x_2 \Rightarrow x^3_1 - x_1 < x^3_2 - x_2 \Rightarrow x^3_1 - x_1 - 2 < x^3_2 - x_2 - 2$, como $x_1^3 - x_1 - 2 < x_2^3 - x_2 - 2 \Rightarrow f(x) < f(x)$, entonces *f* es estrictamente creciente.

3. Demuestre que la función *f* definida por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = -3x^3 - 2x - 2$ es estrictamente decreciente.

f es estrictamente decreciente si: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Como $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -3x_1^3 - 2 > -3x_2^3 - 2$ y $x_1 > x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2$, sumando las desigualdades, se tiene $-3x_1^3 - 2x_1 - 2 > -3x_2^3 - 2x_2 - 2$, , entonces $f(x_1) > f(x_2)$, es decir, *f* estrictamente decreciente.

4. Dada la gráfica de las funciones, analice su monotonía

4.1

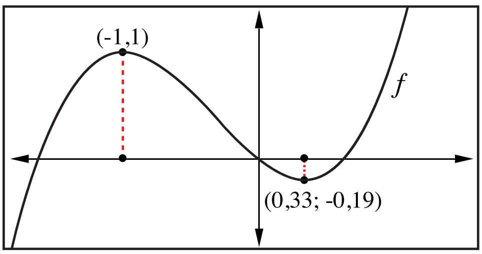


Figura 5.90. Gráfica de función *f* ejemplo 4.1

4.2

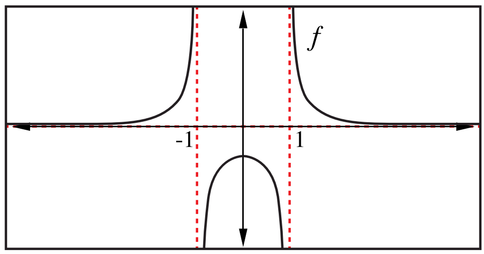


Figura 5.91. Gráfica de función *f* ejemplo 4.2

La gráfica de la función *f* representada en la figura 5.90, en los intervalos $]-\infty,-1[$ y $]0.33,+\infty[$ es estrictamente creciente y en $]-1,0.33[$ es estrictamente decreciente.

La gráfica de la función *f* representada en la figura 5.91, en los intervalos $]-\infty,-1[$ y $]-1,0[$ es estrictamente creciente, y en $]0,1[$ y $]1,+\infty[$ es estrictamente decreciente.

5.12. Funciones pares e impares

Definición 5.16. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ una función real tal que $-x \in A$ y $x \in A$

Se dice que:

a) f es una función par si y solo si $\forall\, x \in A: f(-x) = f(x)$

b) f es una función impar si y solo si $\forall\, x \in A: f(-x) = -f(x)$

NOTA: existen funciones que no son pares ni impares.

Ejemplos

1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^4 + x^2 - 1$, determine si es par o impar.

$\forall\, x \in \mathbb{R}: f(x) = (-x)^4 + (-x)^2 - 1 = x^4 + x^2 - 1 = f(x)$. Como $f(-x) = f(x)$, f es par.

2. Sea $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, determine si es par o impar.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}: f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^3} = -\dfrac{1}{x^3} = -f(x)$ como $f(-x) = -f(x)$, f es impar.

NOTAS:

1. Si f es par, entonces su gráfica es simétrica respecto al eje y (ver figura 5.92).

2. Si f es impar, entonces su gráfica es simétrica respecto al origen (ver figura 5.93).

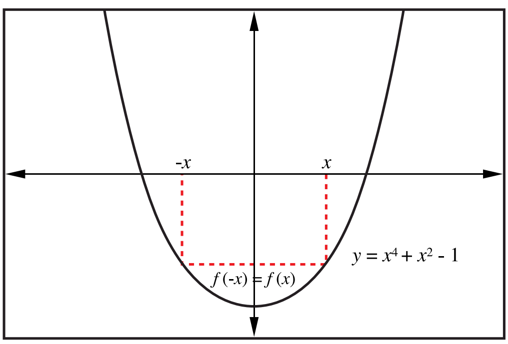


Figura 5.92. Gráfica de función par

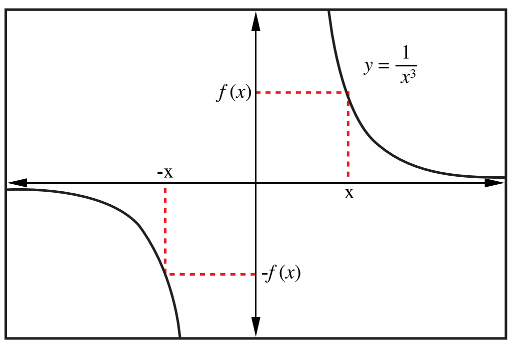


Figura 5.93. Gráfica de función impar

EJERCICIOS PROPUESTOS 5.3

1. Si *f* y *g* son las funciones definidas como se detalla a continuación:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-3}$ $\quad g(x)=-2x^2+3$ calcular $(2f^2+g)(x)$ y $\left[f^2(x)-g(x)\right]^2$

b) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-2x+3}$, $g(x)=\sqrt{\sqrt{3x-1}}$ calcular $(f+2g)(x)$ y $\dfrac{\left[f^4(x)-g^4(x)\right]^2}{(x-4)}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+2$, $g(x)=\sqrt[3]{x^2}-2$ calcular $(f.g)(x)$ y $\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{f-2}{g+2}\right)(x)$

d) $f(x)=\sqrt[5]{32x^2-64x+32}$, $g(x)=\sqrt[5]{x-1}$ calcular $\left(\dfrac{f}{g^{-3}}\right)(x)$; $\left[f(x).g(x)\right]^{-2}$

e) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3, & x\geq 0 \\ 3x-1, & x<0 \end{cases}$, $g(x)=|x+1|$ calcular $f(x)+g(x)$ y $f(x).g(x)$

2. Construir la gráfica de las siguientes funciones y analizar la monotonía.

a) $f(x)=x^3+x^2-x$

b) $f(x)=x^2+\dfrac{3}{x-2}$

c) $f(x)=\dfrac{2x-4}{3-5x}$

d) $f(x)=\left|x^3-2x^2+\dfrac{1}{16}x\right|$

e) $f(x)=\left|\dfrac{x^2-2x-1}{x-1}\right|$

f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x^2-4}$

g) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{16}x^3, & x<0 \\ \dfrac{1}{3}x^2, & 0\leq x\leq 5 \\ -x-\dfrac{10}{3}, & x>5 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} -2x^2, & x\leq -3 \\ \dfrac{1}{x}, & -3<x\leq 2 \\ x^3-1, & x>2 \end{cases}$

3. De las gráficas analice dominio, recorrido, biyectividad, monotonía y paridad.

3.1

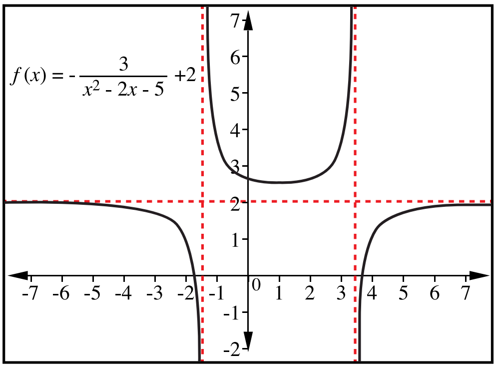


Figura 5.94. Gráfica de función ejercicio 3.1

3.2

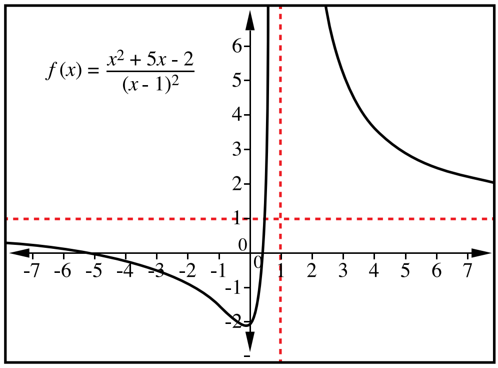


Figura 5.95. Gráfica de función ejercicio 3.2

3.3

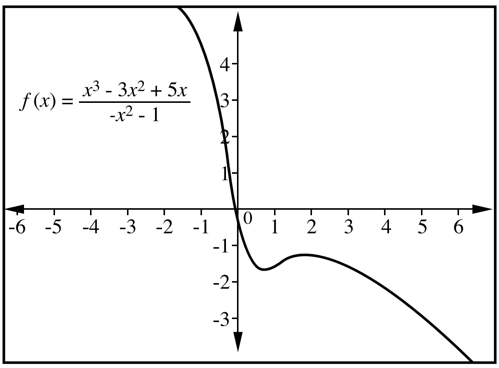


Figura 5.96. Gráfica de función ejercicio 3.3

3.4

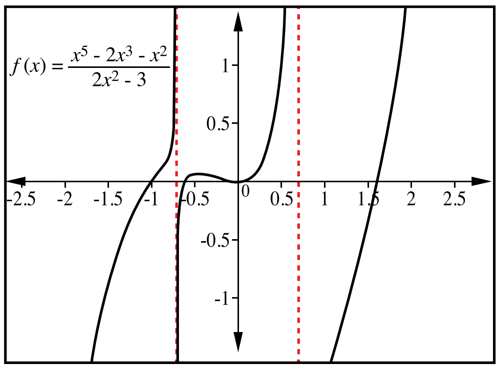


Figura 5.97. Gráfica de función ejercicio 3.4

3.5

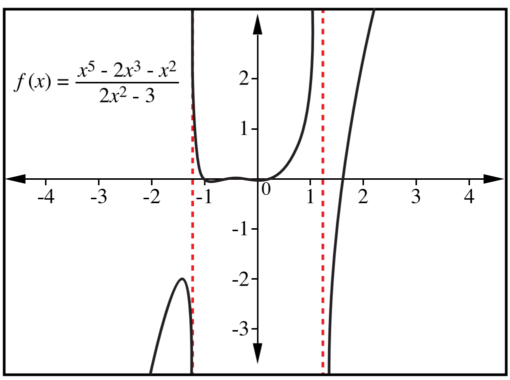


Figura 5.98. Gráfica de función ejercicio 3.5

3.6

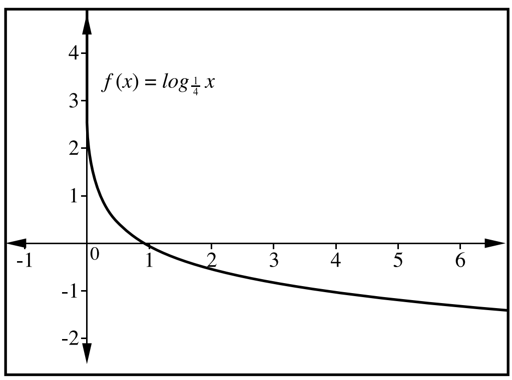


Figura 5.99. Gráfica de función ejercicio 3.6

3.7

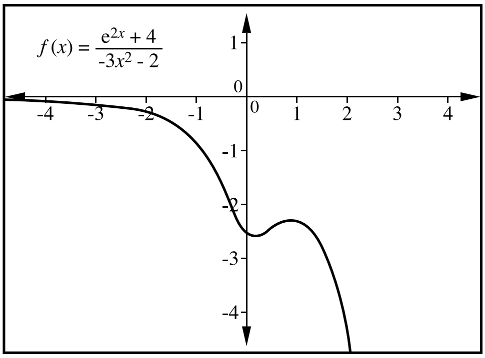


Figura 5.100. Gráfica de función ejercicio 3.7

3.8

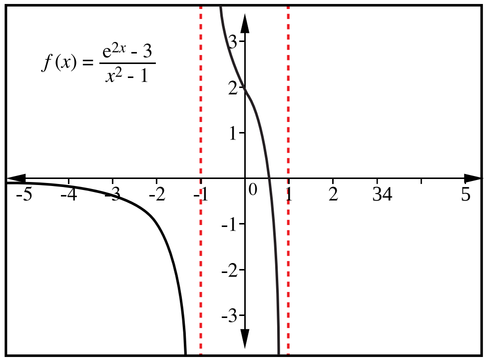


Figura 5.101. Gráfica de función ejercicio 3.8

3.9

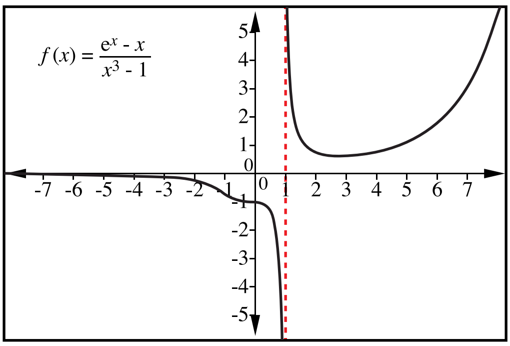


Figura 5.102. Gráfica de función ejercicio 3.9

3.10

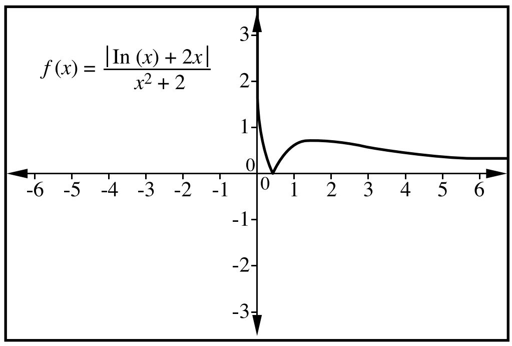


Figura 5.103. Gráfica de función ejercicio 3.10

3.11

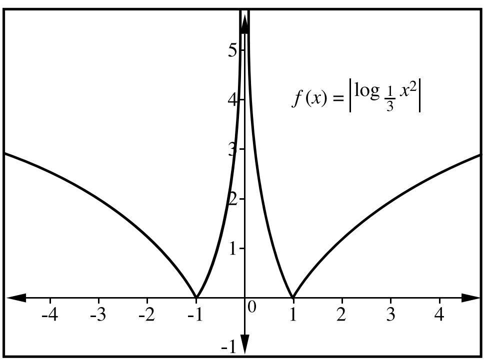


Figura 5.104. Gráfica de función ejercicio 3.11

3.12

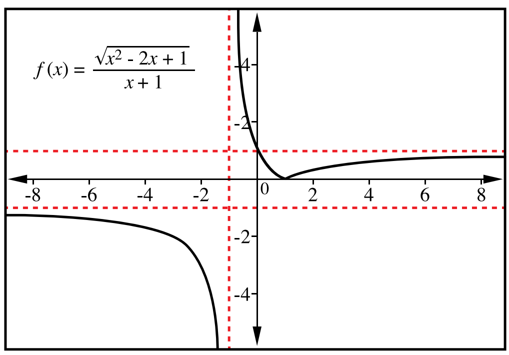


Figura 5.105. Gráfica de función ejercicio 3.12

4. Determinar si las siguientes funciones son pares e impares.

a) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$

b) $f(x) = -3x^3 + x^2 - x + 2$

c) $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

d) $f(x) = \frac{5}{x\sqrt{3x^4 - x^2 + 1}}$

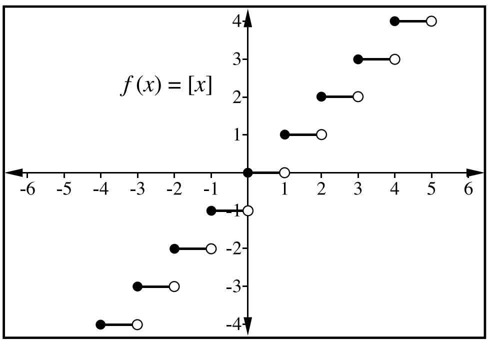
e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + |x|}}$

5.13. Funciones reales especiales

FUNCIÓN PARTE ENTERA

Sea $x \in \mathbb{R}$, la parte entera de x, que se denota $[x]$, es el mayor entero menor o igual a x, su gráfica, se puede ver en la figura 5.106.



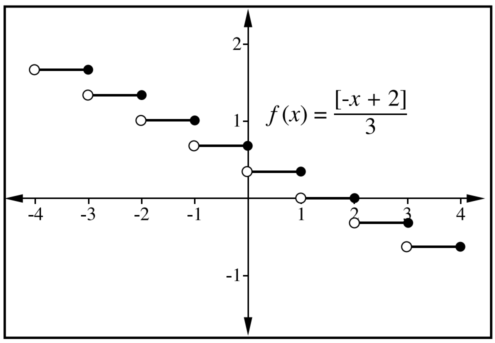


Figura 5.106. Gráfica de función *f(x)=[x]* Figura 5.107. Gráfica de función ejemplo 1

Ejemplos

1. $[-7,5] = -8$
2. $[-1,2] = -2$
3. $[0,25] = 0$
4. $[3,2] = 3$
5. $-\frac{1}{2} = -1$
6. $\frac{7}{3} = 2$

NOTA: Si $n \leq x \leq n+1$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces $[x] = n$.

Ejemplos

1. Graficar $f(x)=\dfrac{[-x+2]}{3}$

Para graficar procedemos de la siguiente manera:

$$[-x+2]=4 \;\Rightarrow\; 4\le -x+2<5 \;\Rightarrow\; -3<x\le -2 \Rightarrow\; f(x)=\frac{[-x+2]}{3}=\frac{4}{3}$$

$$[-x+2]=3 \;\Rightarrow\; 3\le -x+2<4 \;\Rightarrow\; -2<x\le -1 \Rightarrow\; f(x)=\frac{[-x+2]}{3}=\frac{3}{3}=1$$

$$[-x+2]=2 \;\Rightarrow\; 2\le -x+2<3 \;\Rightarrow\; -1<x\le 0 \Rightarrow\; f(x)=\frac{[-x+2]}{3}=\frac{2}{3}$$

$$[-x+2]=1 \;\Rightarrow\; 1\le -x+2< 2 \;\Rightarrow\; 0<x\le 1 \Rightarrow\; f(x)=\frac{[-x+2]}{3}=\frac{1}{3}$$

$$[-x+2]=0 \;\Rightarrow\; 0\le -x+2<1 \;\Rightarrow\; 1<x\le 2 \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{[-x+2]}{3}=\frac{0}{3}=0$$

$$[-x+2]=-1 \;\Rightarrow\; -1\le -x+2<0 \;\Rightarrow\; 2<x\le 3 \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{[-x+2]}{3}=-\frac{1}{3}$$

La gráfica de la función $f(x)=\dfrac{[-x+2]}{3}$ está representado en la figura 5.107.

2. Empleando un proceso similar al del ejemplo 1, verifique las gráficas de las partes enteras representadas en las figuras 5.108 y 5.109.

2.1 $\quad f(x)=\dfrac{[x^2+1]}{|x|}$

2.1 $\quad f(x)=\dfrac{[2x+3]}{\sqrt{x^2+3}}$

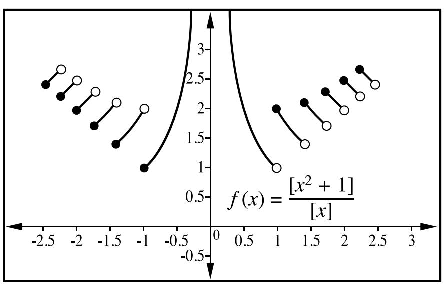


Figura 5.108. Gráfica de la función 2.1

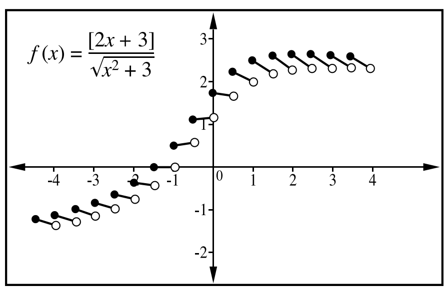


Figura 5.109. Gráfica de la función 2.2

CAPÍTULO 6 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

6.1. Función exponencial

Sea $a \in \mathbb{R}^+$, la función exponencial en base a, es la función definida por: $exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}+$ tal que $exp_a(x) = a^x$.

Las gráficas de la función exponencial bajo las condiciones $0 < a < 1$ y $a > 1$ se representan en las figuras 6.1 y 6.2 respectivamente.

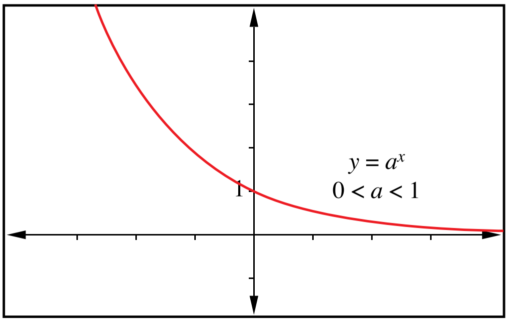


Figura 6.1. Gráfica de la función exponencial si $0 < a < 1$

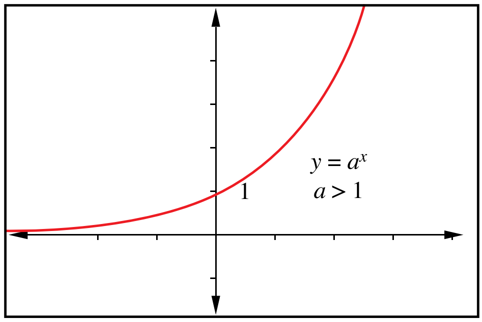


Figura 6.2. Gráfica de la función exponencial si $a > 1$

Ejemplos

A continuación, se representan cuatro gráficas de funciones exponenciales:

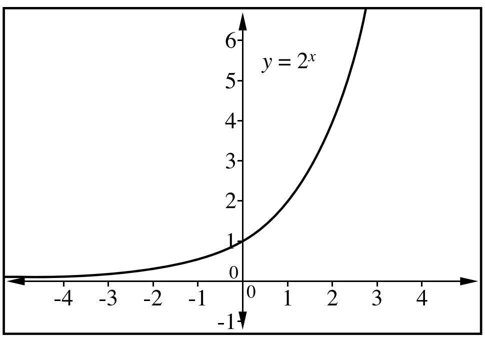


Figura 6.3. Gráfica de función exponencial 1

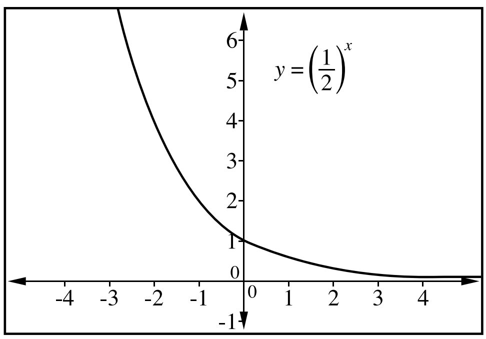


Figura 6.4. Gráfica de función exponencial 2

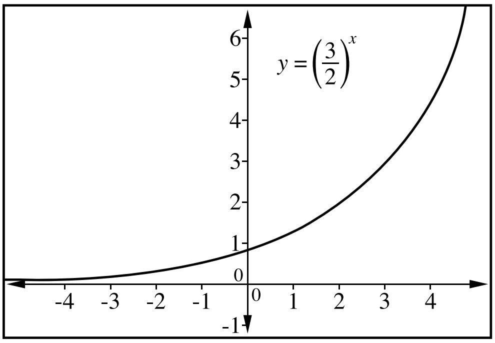


Figura 6.5. Gráfica de función exponencial 3

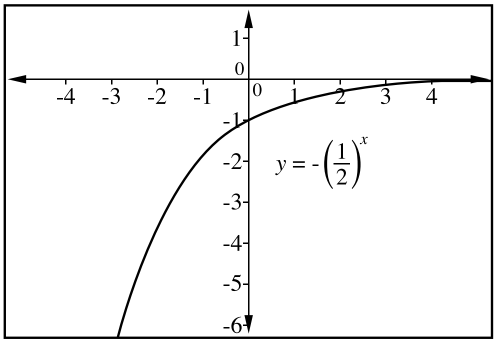


Figura 6.6. Gráfica de función exponencial 4

Teorema 6.1. Sea $a,b \in \mathbb{R}^+$ y $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple que:

1. $a^{x+y} = a^x a^y$

2. $a^{xy} = (a^x)^y$

3. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

4. $(ab)^x = a^x b^x$

Teorema 6.2. La función exponencial $f(x) = a^x$ satisface:

1. Si $a \neq 1$, la función es biyectiva.
2. Si $a > 1$, la función es estrictamente creciente.
3. Si $0 < a < 1$, la función es estrictamente decreciente.

Dado que la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$ es biyectiva, esta tiene inversa y es la función logarítmica.

Sea a $\in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, la función logarítmica en base a_1 , que se denota por $\log_a$, es la función inversa de la función exponencial, es decir:

$$log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } log_a(x) = (\exp_a x)^{-1}$$

Las gráficas de la función logarítmica y exponencial bajo las condiciones $0 < a < 1$ y $a > 1$ se representan en las figuras 6.7 y 6.8 respectivamente.

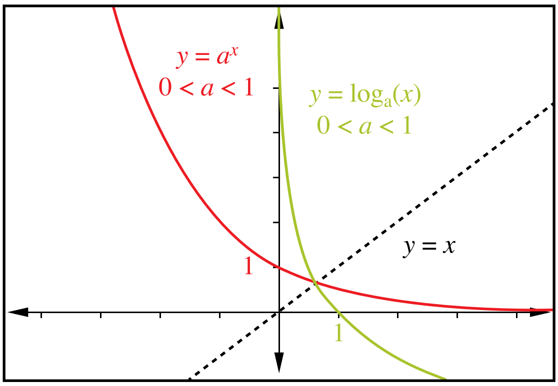


Figura 6.7. Gráfica de la función exponencial si $0 < a < 1$

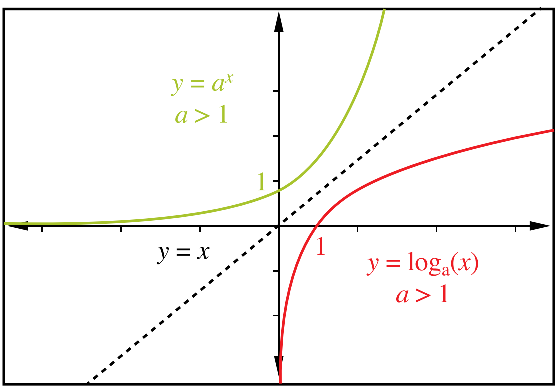


Figura 6.8. Gráfica de la función exponencial si $a > 1$

NOTA: entre la función logarítmica y exponencial, se cumple que:

1. $\log_a(\exp_a x) = x$

2. $\exp_a(\log_a x) = x$

3. $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

Ejemplos

1. $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

2. $\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{27}{8}\right) = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

3. $\log_{\sqrt{2}} x = 10 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{10} = x \Leftrightarrow x = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} = 2^5 = 32$

4. $\log_b 81 = 8 \Leftrightarrow b^8 = 81 \Leftrightarrow b^8 = 3^4 \Leftrightarrow b^8 = \left(\sqrt{3}\right)^8 \Leftrightarrow b = \sqrt{3}$

5. $\log_{a-2}\left(\frac{1}{64}\right) = 3 \Leftrightarrow (a-2)^3 = \frac{1}{64} \Leftrightarrow (a-2)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \Leftrightarrow a-2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}$

NOTA: si $a = 10$, $y = log_{10}\ x = log\, x$ se le conoce como logaritmo en base 10. Si $a = e$ y $log_e x$ $ln\, x$ se lee logaritmo natural de x, donde $e = 2{,}718281...$

Ejemplos

Para la construcción de las gráficas logarítmicas, utilizamos: $log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$; por ejemplo $\log_2 x = y \Leftrightarrow 2^y = x$ o $\ln(x+5) = y \Leftrightarrow e^y = x+5 \Rightarrow x = e^y - 5$, etc.

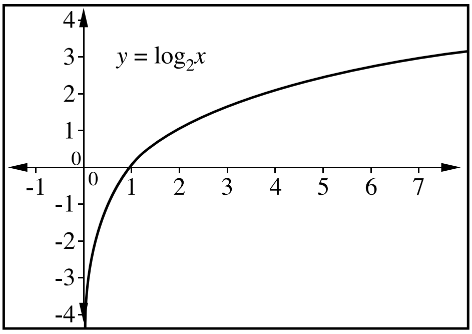


Figura 6.9. Gráfica de función logarítmica 1

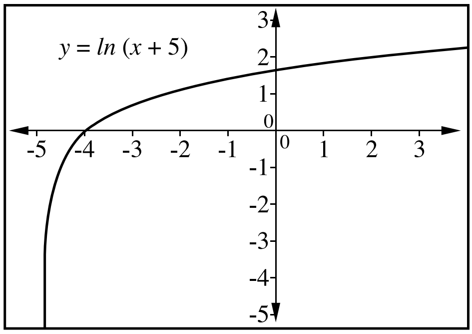


Figura 6.10. Gráfica de función logarítmica 2

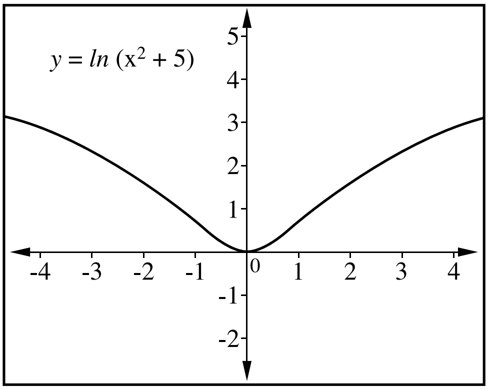


Figura 6.11. Gráfica de función logarítmica 3

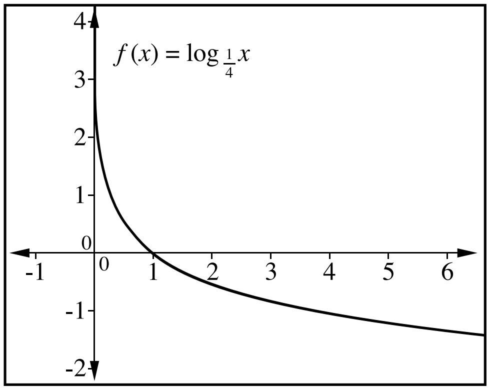


Figura 6.12. Gráfica de función logarítmica 4

Teorema 6.3. Sea $u,v \in \mathbb{R}^+$, entonces:

1. $\log_a (u.v)=\log_a u+\log_a v$

2. $\log_a \left(\dfrac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

3. $\log_a u^n = n \log_a u$

4. $\log_a a^{u} = u$

5. $a^{\log_a u} = u$

6. $\log_a a = 1$

7. $\log_a 1=0$

8. $\log_a u = \dfrac{\log_b u}{\log_b a}, \quad a,b>0, \quad a=b\neq 1$

NOTA: se aceptarán, sin demostración, las siguientes igualdades:

a) $\log_{b} a = \dfrac{1}{\log_{a} b}$

b) $\log_{b^n} x = \dfrac{1}{n}\log_{b} x$

c) $\log_{ab} x = (\log_{a} x)(1 = \log_{b} a)$

Ejemplos

1. Expresar el logaritmo en términos de logaritmos de *a*, *b*, *c*, *f* y *g*.

$$\log_3\left(\frac{a^3b^3c^{\frac{1}{2}}}{f^{-\frac{5}{7}}g^{\frac{3}{4}}}\right) = \log_3\left(a^3b^3c^{\frac{1}{2}}\right) - \log_3\left(f^{-\frac{5}{7}}g^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$= \log_3 a^3 + \log_3 b^3 + \log_3 c^{\frac{1}{2}} - \log_3 f^{-\frac{5}{7}} - \log_3 g^{\frac{3}{4}}$$

$$= 3\log_3 a + 3\log_3 b + \frac{1}{2}\log_3 c + \frac{5}{7}\log_3 f - \frac{3}{4}\log_3 g$$

2. Expresar el logaritmo en términos de logaritmos de *x*, *y*, *z*, *w*.

$$\log_5 \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{x^2}.y^4z^6}{\sqrt{z+w}.w^6}} = \frac{1}{5}\log_5\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}.y^4z^6}{\sqrt{z+w}.w^6}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left[\log_5 \sqrt[3]{x^2}.y^4z^6 - \log_5 \sqrt{z+w}.w^6\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{2}{3}\log_5 \mathrm{x} + 4\log_5 y + 6\log_5 z - \frac{1}{2}\log_5(z+w) - 6\log_5 w\right]$$

$$= \frac{2}{15}\log_5 \mathrm{x} + \frac{4}{5}\log_5 y + \frac{6}{5}\log_5 z - \frac{1}{10}\log_5(z+w) - \frac{6}{5}\log_5 w$$

3. Utilizando las propiedades de los logaritmos, expresar las siguientes expresiones como un solo logaritmo.

a) $$\frac{2}{3}\left[\frac{4}{5}\log_6 \mathrm{x} + 3\log_6 y + 7\log_6 z - \frac{5}{2}\log_6 (z-w) - 2\log_6 w\right]$$

$$\frac{2}{3}\left[\frac{4}{5}\log_6 \mathrm{x} + 3\log_6 y + 7\log_6 z - \frac{5}{2}\log_6 (z-w) - 2\log_6 w\right]$$

$$\frac{2}{3}\left[\log_6 \mathrm{x}^{\frac{4}{5}} + \log_6 y^3 + \log_6 z^7 - \log_6 (z-w)^{\frac{5}{2}} - \log_6 w^2\right]$$

$$\frac{2}{3}\left[\log_6 \mathrm{x}^{\frac{4}{5}} y^3 z^7 - \log_6 (z-w)^{\frac{5}{2}}\, w^2\right]$$

$$\frac{2}{3}\left[\log_6\left(\frac{\mathrm{x}^{\frac{4}{5}} y^3 z^7}{(z-w)^{\frac{5}{2}}\, w^2}\right)\right] = \log_6 \sqrt[3]{\left(\frac{\mathrm{x}^{\frac{4}{5}} y^3 z^7}{(z-w)^{\frac{5}{2}}\, w^2}\right)^2}$$

b) $$\frac{7}{8}\left(\log_{\frac{1}{2}} \mathrm{a} + \log_{\frac{1}{2}} b - \log_{\frac{1}{2}} c\right) - \frac{5}{2}\left[\log_{\frac{1}{2}} (x-y) + \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + xy + y^2)\right]$$

$$\frac{7}{8}\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{c}}\right) - \frac{5}{2}\left[\log_{\frac{1}{2}} (x-y)(x^2 + xy + y^2)\right]$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{c}}\right)^{\frac{7}{8}} - \log_{\frac{1}{2}} \left(x^3 - y^3\right)^{\frac{5}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} \left[\frac{\left(\frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{c}}\right)^{\frac{7}{8}}}{\left(x^2 - y^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right]$$

6.3. Ecuaciones exponenciales

A continuación, se resuelven algunos ejemplos de ecuaciones exponenciales:

1. Resuelva la ecuación $256^{\sqrt{x}+3} = \dfrac{1}{32}$

$$256^{\sqrt{x}-3} = \frac{1}{32} \Rightarrow \left(2^{8}\right)^{\sqrt{x}-3} = 2^{-6} \Rightarrow 2^{8(\sqrt{x}-3)} = 2^{-6} \Rightarrow 8(\sqrt{x}-3) = -6 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{81}{16}$$

2. Resuelva la ecuación $7^{3x+5} = 4^{2-5x}$

$$(3x+5)\log 7 = (2-5x)\log 4$$

$$3x \log 7 + 5x \log 4 = 2 \log 4 - 5 \log 7$$

$$x(3 \log 7 + 5 \log 4) = 2 \log 4 - 5 \log 7$$

$$x = \frac{2 \log 4 - 5 \log 7}{3 \log 7 + 5 \log 4} = -0,5448$$

3. Resuelva la ecuación $25^{x} - 2\,(5^{x}) = 63$

$$25^{x}+2(5^{x})=63 \Rightarrow (5^{x})^{2} + 2\,(5^{x}) - 63 = 0 \Rightarrow (5^{x}-7)\,(5^{x}+9) - 0 \Rightarrow 5^{x} = 7 \text{ o } 5^{x} = -9$$

$5^{x} = 7 \Rightarrow \log 5^{x} = \log 7 \Rightarrow x = \dfrac{\log 7}{\log 5}$. $5^{x} = -9$ no tiene solución.

4. Resuelva la ecuación $5\,(3^{x}) + 216\,(3^{-x}) = 102$

$$5(3^{x}) + 216(3^{x}) = 102 \Rightarrow 5(3^{2x}) + \frac{216}{3^{x}} - 102 = 0 \Rightarrow 5(3^{2x}) - 102.3^{x} + 216 = 0 \Rightarrow \left[(5(3^{x})-12)(3^{x}-18)\right] = 0$$

$$5(3^{x}) = 12 \Rightarrow 3^{x} = \frac{12}{5} \Rightarrow \log 3^{x} = \log \frac{12}{5} \Rightarrow x = \frac{\log \frac{12}{5}}{\log 3}$$

$$3^{x} = 18 \Rightarrow \log 3^{x} = \log 18 \Rightarrow x = \frac{\log 18}{\log 3}$$

6.4. Ecuaciones logarítmicas

A continuación, se resuelven algunos ejemplos de ecuaciones logarítmicas:

1. Resuelva la ecuación $log_2\,(x+7)\;log_2\,(x)=3$

$log_2\,(x+7)+log_2\,(x)=3 \Rightarrow log_2\,(x+7)\,x=3 \Rightarrow x^2+7x=2^3$

$x^2+7x-8=0 \Rightarrow (x+8)(x-1)=0 \Rightarrow x=-8 \vee x=1$

La solución es $x=1$, y $x=-8$ no lo es, ya que no existe logaritmos de valores negativos.

2. Resuelva la ecuación $ln\,(2x-7)-ln\,(x-3)=ln(x+2)-ln\,x$.

$$ln\,(2x-7)-ln\,(x-3)=ln(x+2)-ln\,x \Rightarrow ln\left(\frac{2x-7}{x-3}\right)=ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \Rightarrow \frac{2x-7}{x-3}=\frac{x+2}{x}$$

$$\frac{2x-7}{x-3}=\frac{x+2}{x} \Rightarrow x^2-6x+6=0 \Rightarrow x=3-\sqrt{3} \vee x=3-\sqrt{3}$$

3. Resuelva la ecuación $log_4\,(3x-5)\;2\;log_{16}\,(7x-2)$

$$\log_4(3x-5)=2+\log_{16}(7x-2) \Rightarrow \log_4(3x-5)-\frac{1}{2}\log_4(7x-2)=2$$

$$\log_4\frac{3x-5}{\sqrt{7x-2}}=2 \Rightarrow \frac{3x-5}{\sqrt{7x-2}}=16 \Rightarrow 9x^2-1822+537=0 \Rightarrow x=0.295 \vee x=202.15$$

4. Resuelva la ecuación $log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+2}+63log_{\sqrt{x+2}}\frac{1}{3}=16$

$$\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+2}+63\log_{\sqrt{x+2}}\frac{1}{3}=16 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+2}+63\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+2}}=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}^{\;2}\sqrt{x+2}-16\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+2}+63=0 \Rightarrow \left(\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+2}-7\right)\left(\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+2}-9\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+2}-7=0 \vee \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+2}-9=0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+2}=7 \vee \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+2}=9 \Rightarrow$$

$$\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+2}-7=0 \vee \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+2}-9 \Rightarrow \sqrt{x+2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{7} \vee \sqrt{x+2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\left(\frac{1}{3}\right)^{14}-2 \vee x=\left(\frac{1}{3}\right)^{18}-2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 6.1

Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales y logaritmicas.

1. $20^{-2x+3}=4^{3x-1}\,.\,5^{-x+4}$

2. $3^{x+2}+3^{x}=120$

3. $8^{2x-5}=9^{1-2x}$

4. $49^{x}+2.\,7^{x}=63$

5. $4^{x}+216.\,4^{-x}=102$

6. $11^{x+3}=5^{2x+7}$

7. $5^{x}+5^{x-1}+5^{x-3}+5^{x-4}=455$

8. $256^{\sqrt{x-2}}=64^{x+5}$

9. $\log_{\sqrt{x}}(x+3)+\log_{\sqrt{x}}(x-2)=2$

10. $\left(\frac{4}{3}\right)^{5x^2-8}=\frac{3}{4}^{6x-9}$

11. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+3\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-2\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}+4\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}=320$

12. $\left(\frac{5}{2}\right)^{x-3}\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{1}{x}}=\frac{25}{4}$

13. $\log_{2}(x+2)-\log_{4}(2x+1)=1$

14. $\ln(x^2+x-2)-\ln(x-1)=2$

15. $\ln(x-7)=\ln(x^2-6x-7)-1$

16. $3-\ln(x-4)=-\ln(x^2-x-12)$

17. $\log(x^2-9)-\log(x-3)=\log\ x$

18. $\log(5x-2)=3-\log(2x-7)$

19. $\log_3(x-1)+\log_3(x-5)=\log_3(2x+1)-1$

20. $5\log\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{25}\log x=0$

21. $\log_{\frac{1}{2}}(x+7)+\log_{\frac{1}{4}}(x+5)=\log_{\frac{1}{8}}(3)$

22. $\log_2\sqrt{3x-2}+6\log_{\sqrt{3x\ \ 2}}2=5$

23. $\log 256^{\log x^3}-\log 16^{\log x^3}=\log x^{3x}$

24. $\log_x 8\log_{\frac{x}{2}}16+\log_{\frac{x}{64}}8=0$

25. $\dfrac{\log\left(7\sqrt{x-9}\right)}{\log\left(\sqrt{x^3}-3\right)}=1$

26. $\log_{\sqrt[3]{3x-2}}(3x-4)=\log_2 16+\log_3\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-1}$

6.5. Inecuaciones exponenciales

Definición 6.1. Llamaremos inecuaciones exponenciales en una incógnita, a aquellas que adoptan la forma: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \vee a^{f(x)} < a^{g(x)}$ con $f(x)$ y $g(x)$ expresiones en x y $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.

Para su resolución, consideraramos dos casos:

Primer caso

Si $a > 1$, los exponentes de la inecuación conservan el sentido de la ecuación, es decir:

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Segundo caso

Si $0 < a < 1$ los exponentes de la inecuación cambian de sentido, es decir:

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

Ejemplos.

1. $\sqrt[3]{5^{\frac{4x-3}{2}}} > \sqrt[5]{5^{\frac{7(6x+4)}{3}}}$

$$\sqrt[3]{5^{\frac{4x-3}{2}}} > \sqrt[5]{5^{\frac{7(6x+4)}{3}}} \Rightarrow 5^{\frac{4x-3}{6}} > 5^{\frac{42x+28}{15}} \Rightarrow \frac{4x-3}{6} > \frac{42x+28}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20x-15 > 84x+56 \Rightarrow x < -\frac{71}{64}$$

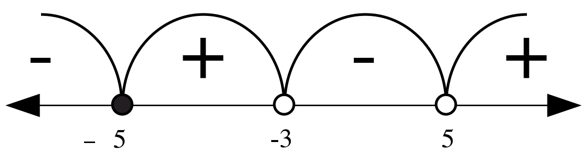
Por lo tanto, la solución es: $x \in \left]-\infty, -\frac{71}{64}\right[$

2. $\sqrt[x+5]{\frac{2}{3}^{x^2-25}} < \sqrt[x+5]{\frac{4}{9}^{x-5}}$

$$\sqrt[x+5]{\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-25}} < \sqrt[x+5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{x-5}} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{(x-5)(x+5)}{x+5}} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-10}{x+5}} \Rightarrow x-5 > \frac{2x-10}{x+5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-5-\frac{2x-10}{x+5}>0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-15}{x+5}>0 \Rightarrow \frac{(x-5)(x+3)}{x+5}>0$$

Aplicando el método de los intervalos, hallamos la solución de la inecuación:



Por lo tanto, la solución es: $x \in]-5,-3[\cup]5,+\infty[$

6.6. Inecuaciones logarítmicas

Para el análisis de las inecuaciones logarítmicas, se deben tener en cuenta la definición, las propiedades y las gráficas de la función logarítmica $y = log_a(x)$, para $0 < a < 1$ y $a > 1$.

Teorema 6.4. Si $a > 1$ y $n \in \mathbb{R}$, entonces:

1) $\log_a f(x) > n \Leftrightarrow f(x) > a^n \wedge f(x) > 0$

2) $\log_a f(x) < n \Leftrightarrow f(x) < a^n \wedge f(x) > 0$

Teorema 6.5. Si $0 < a < 1$ y $n \in \mathbb{R}$, entonces:

1) $\log_a f(x) > n \Leftrightarrow f(x) > a^n \wedge f(x) > 0$

2) $\log_a f(x) < n \Leftrightarrow f(x) > a^n \wedge f(x) > 0$

Teorema 6.6. Si $a > 1$, entonces:

1) $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x) \wedge (f(x) > 0 \wedge g(x) > 0)$

2) $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x) \wedge (f(x) > 0 \wedge g(x) > 0)$

Teorema 6.7. Si $0 < a < 1$, entonces:

1) $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x)\ g(x) \wedge (f(x) > 0 \wedge g(x) > 0)$

2) $\log_a f(x)\ \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x) \wedge (f(x)\ 0 \wedge g(x) > 0)$

Ejemplos

1. $\log_{\frac{1}{4}}(5x+8) < -3.$

Por el teorema 6.5, para hallar la solucion de la inecuación, se halla la solución del sistema:

$$\begin{cases} 5x+8>0 \\ 5x+8>\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{8}{5} \\ 5x>64-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\left]-\dfrac{8}{5},+\infty\right[\\ x\in\left]\dfrac{56}{5},+\infty\right[\end{cases}$$

Al hallar la intersección de las soluciones obtenemos la solución del sistema, y por tanto la solución de la inecuación logarítmica:

Entonces, la solución es: $x \in \left]\frac{56}{5}, +\infty,\right[$

2. $\log_4 (|2x - 3| - 1) > 5$.

Por el teorema 6.4, para hallar la solucion de la inecuación, se halla la solución del sistema:

$$\begin{cases} |2x-3|-1>0 \\ |2x-3|-1>4^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2x-3|>1 \\ |2x-3|>1025 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3<-1 \ \vee \ 2x-3>1 \\ 2x-3<-1025 \ \vee \ 2x-3>1025 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<1 \ \vee \ x>2 \\ x<-\frac{511}{2} \ \vee \ x>\frac{514}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[\\ x \in \left]-\infty, -\frac{511}{2}\right[\cup \left]\frac{514}{2}, +\infty\right[\end{cases}$$

Al hallar la intersección de las soluciones obtenemos la solución del sistema, y por tanto la solución de la inecuación logarítmica:

Entonces, la solución es: $x \in \left]-\infty, -\frac{511}{2}\right[\cup \left]\frac{514}{2}, +\infty\right[$

3. $\log_x \left(\frac{x-4}{x+5}\right) > 1$

Para que la inecuación esté bien definida $x > 0$ y $x \neq 1$.

Para hallar la solución, debemos analizar los siguientes casos:

a) Si $x > 1$, entonces:

Por el teorema 6.4, para hallar la solución de la inecuación, se halla la solución del sistema:

$$\begin{cases} \frac{x-4}{x+5}>0 \\ \frac{x-4}{x+5}>x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-4}{x+5}>0 \\ \frac{-x^2-4x-4}{x+5}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-4}{x+5}>0 \\ \frac{(x+2)^2}{x+5}<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty, -5\right[\cup \left]4, +\infty\right[\\ x \in \left]-\infty, -5\right[\end{cases}$$

Al hallar la intersección de las soluciones obtenemos la solución del sistema, y por tanto la solución de la inecuación logarítmica:

Entonces, la solución es: $x \in]-\infty,-5[$

En este caso la solución es vacía, ya el valor de x por ser parte de la base del logaritmo, debe ser un número no negativo.

b) Si $0 < x < 1$,entonces:

Por el teorema 6.5, para hallar la solución de la inecuación, se halla la solución del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{x+5} > 0 \\ \dfrac{x-4}{x+5} < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-4}{x+5} > 0 \\ \dfrac{-x^2-4x-4}{x+5} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-4}{x+5} > 0 \\ \dfrac{(x+2)^2}{x+5} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in]-\infty,-5[\cup]4,+\infty[\\ x \in]-5,+\infty[\end{cases}$$

Al hallar la intersección de las soluciones, obtenemos la solución del sistema, y por tanto la solución de la inecuación logarítmica:

Entonces, la solución es: $x \in]4\ ,+\infty[$

En este caso la solución, también es vacía, ya que: $]0,1[\quad]4,+\infty[= \emptyset$.

En conclusión, la inecuación logarítmica no tiene solución, ya que tanto para el caso a) y b) no hay solución.

4. $\log_5(7x+3) > \log_5(2x+9)$.

Por el teorema 6.6, para hallar la solución de la inecuación, se halla la solución del sistema:

$$\begin{cases} 7x+3>0 \\ 2x+9>0 \\ 7x+3>2x+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{3}{7} \\ x > -\dfrac{9}{2} \\ x > \dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left]-\dfrac{3}{7},+\infty\right[\\ x \in \left]-\dfrac{9}{2},+\infty\right[\\ x \in \left]\dfrac{6}{5},+\infty,\right[\end{cases}$$

Al hallar la intersección de las soluciones obtenemos la solución del sistema, y por tanto la solución de la inecuación logarítmica:

Entonces, la solución es: $x \in \left]\frac{6}{5}, +\infty, \right[$

CAPÍTULO 7 TRIGONOMETRÍA

7.1. Funciones trigonométricas

Consideremos el triángulo rectángulo ABC y $\propto$ como uno de sus ángulos agudos, (ver figura 7.1). Definamos para $\propto$ las funciones trigonométricas de la siguiente manera:

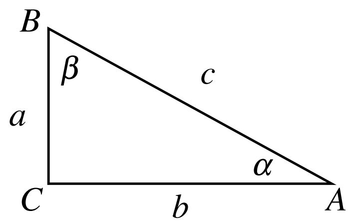


Figura 7.1. Triángulo ABC

$$Sen\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{hipotenusa} = \frac{\text{a}}{\text{c}} \qquad Cos\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{hipotenusa} = \frac{\text{b}}{\text{c}}$$

$$Tag\ \alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ \text{adyacente}} = \frac{a}{b} \qquad Ctg\ \alpha = \frac{cateto\ \ \text{adyacente}}{cateto\ \ \text{opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$Sec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{c}}{\text{b}} \qquad Csc\,\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ opuesto} = \frac{c}{a}$$

De la misma forma como se definió las funciones trigonométricas para el ángulo $\propto$ se lo puede hacer utilizando el ángulo β .

De las definiciones de las funciones trigonométricas realizadas para el ángulo $\propto$ se derivan identidades trigonométricas como:

$$Sen\ \alpha = \frac{1}{Csc\ \alpha} \qquad Cos\ \alpha = \frac{1}{Sec\ \alpha} \qquad Tag\ \alpha = \frac{1}{Ctg\ \alpha}$$

La medida de un ángulo puede ser en grados o en radianes, por ejemplo, la notación $\propto = 45$ especifica un ángulo $\propto$ cuya medida es 45° , la notación $\theta = 2\theta\pi$ indica un ángulo θ cuya medida es 2π radianes.

Si se requiere medidas menores de un grado, se puede dividir el grado en 60 partes iguales o minutos y lo denotamos $1^{o} = 60'$; cada minuto en 60 tantos iguales llamados segundos y lo denotamos $1' = 60''$. Por ejemplo, la notación $\lambda = 65^{o}$ 45'56" se refiere a un ángulo λ que mide 65 grados, 45 minutos y 56 segundos; $\delta = 123^{o}15'48'$ es un ángulo δ que mide 123 grados, 15 minutos y 48 segundos.

Las relaciones entre grados y radianes se establecen de la siguiente manera:

1. $180 = \pi$ radianes .

2. $1^{\circ} = \dfrac{\pi}{180}\ radián = 0.0175\ radián$

3. $1\ radián = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 57{,}2958$

NOTA: no debe haber confusión en el uso de grados y radianes; si se escribe $\delta = 12$ se debe entender que el ángulo δ mide 12 radianes, y no 12 grados que se escribe $\delta = 12$.

Para cambiar la medida de un ángulo de grados a radianes, se debe multiplicar por $\dfrac{\pi}{180}$, y para cambiar de radianes a grados, se debe multiplicar por $\dfrac{180}{\pi}$.

Ejemplos

1. Cambiar 45 grados a radianes.

$$45^{\circ} = 45\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2. Cambiar 90 grados a radianes

$$90^{\circ} = 90\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{2}$$

3. Cambiar 270 grados a radianes.

$$270^{\circ} = 270\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

4. Cambiar 330 grados a radianes.

$$330^{\circ} = 330\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{11\pi}{6}$$

5. Cambiar $\frac{12\pi}{5}$ a grados.

$$\frac{12\pi}{5} = \frac{12\pi}{5}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 432^{\circ}$$

6. Cambiar $\frac{17\pi}{7}$ a grados.

$$\frac{17\pi}{7} = \frac{17\pi}{7}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 437{,}1429^{\circ}$$

7. Expresar 437,1429º en grados minutos y segundos.

$$\begin{aligned} 437{,}1429 &= 437^{o} + (0{,}1429) \\ &= 437^{o} + (0{,}1429)(60) \qquad 1^{o} = 60' \\ &= 437^{o} + 8{,}574' \\ &= 437^{o} + 8' + (0{,}574) \\ &= 437^{o} + 8' + (0{,}574)(60') \quad 1' = 60'' \\ &= 437^{o} + 8' + 34{,}44'' \end{aligned}$$

$$437.1429^{o} = 437^{o}\ 8'\ 34.44''$$

8. Expresar 12 *radianes* en grados minutos y segundos.

$$12\ radianes = 12\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1\ radián = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$$

$$= 687.5494^{o}$$

$$= 687^{o} + (0.5494)(60) \qquad 1^{o} = 60'$$

$$= 687^{o} + 32.964'$$

$$= 687^{o} + 32' + (0.964)'$$

$$= 687^{o} + 32' + (0.964)(60\,'') \qquad 1' = 60'$$

$$= 687^{o} + 32' + 57.84''$$

$$12\ \textit{radianes} = 687^{o}\ 3257.84\,''$$

9. Expresar 687º 32'57,84' en grados.

Como $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ y $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$ entonces,

$$687^{\circ}32'57\ 84'' = 687 + \left(\frac{32}{60}\right) + \left(\frac{57{,}84}{3600}\right) = 687{,}5494^{\circ}$$

7.2. Gráficas de funciones trigonométricas

Definición 7.1. Una función f es periódica si existe un número real positivo k tal que $f(t+k) = f(t)$ para toda t en el dominio de f. Este número real positivo k mínimo, si existe, es el periodo de f.

A continuación, se construyen las gráficas de las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, y se da a conocer su dominio, recorrido, intersección con el eje x, período, simetría y si es par o impar.

FUNCIÓN SENO

$$Sen: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = Sen(x)$$

Al colocar en el plano cartesiano los valores de la función seno representados en la tabla, dibujamos un ciclo (una onda senoidal) de la función, y al aumentar hacia la izquierda y derecha, los ciclos, obtenemos la gráfica de la función seno representada en la figura 7.2.

x	$y = Sen\ (x)$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

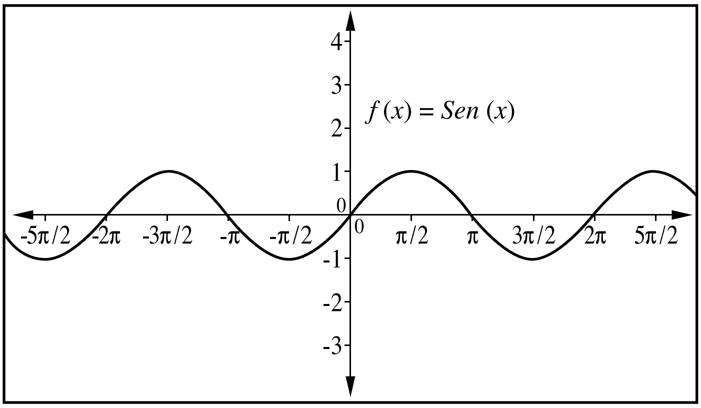


Figura 7.2. Gráfica de la función seno

La función seno tiene por dominio a los reales y de recorrido $[-1, 1]$; la función es simétrica respecto al origen; es una función impar, esto es se cumple que $Sen\ (-x) = -Sen(x)$; su período es 2π , es decir, $Sen\ (x + 2\pi) = \text{Sen}\ (x)$; y las intersecciones con el eje x son: $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

FUNCIÓN COSENO

$$\text{Cos} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = \text{Cos}\ (x)$$

Al colocar en el plano cartesiano los valores de la función coseno representados en la tabla, dibujamos un ciclo (una onda) de la función, y al aumentar hacia la izquierda y derecha, los ciclos, obtenemos la gráfica de la función coseno representada en la figura 7.3.

x	$y = Cos\,(x)$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

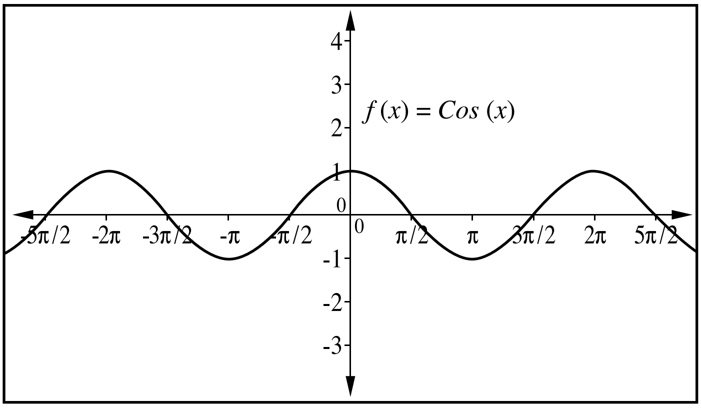


Figura 7.3. Gráfica de la función coseno

La función coseno tiene por dominio a los reales y de recorrido $[-1,\ 1]$; la función es simétrica respecto al eje y; es una función par, esto es se cumple que $Cos\,(-x) = Cos\,(x)$; su período es 2π , es decir, $Cos\,(x + 2\pi) = Cos\,(x)$; y las intersecciones con el eje x son: $\frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

FUNCIÓN TANGENTE

$$\mathrm{Tag} : \mathbb{R} - \left\{ x \,/\, x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \mathrm{Tag}(x)$$

Al colocar en el plano cartesiano los valores de la función tangente con $x \in [0, \pi]$, dibujamos un ciclo de la función y, al aumentar los ciclos hacia la izquierda y derecha, obtenemos la gráfica de la función tangente representada en la figura 7.4.

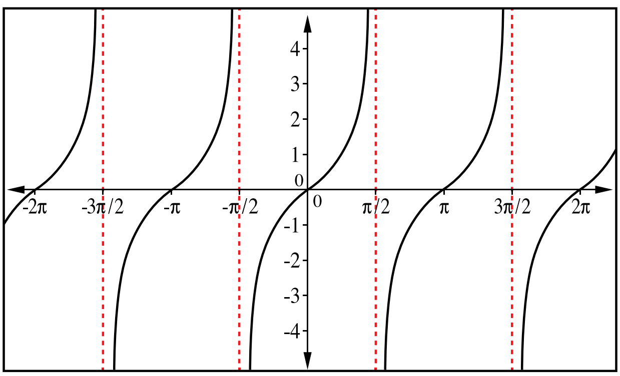


Figura 7.4. Gráfica de la función tangente

La función tangente tiene por dominio: $\mathbb{R}-\left\{x/x=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ \ n\in\mathbb{Z}\right\}$ y de recorrido a los reales; la función es simétrica respecto al origen; es una función impar, esto es se cumple que $Tag(-x)=-Tag(x)$; su periodo es π , es decir, $Tag(x+\pi)=Tag(x)$ las intersecciones con el eje x son: $n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$ y tiene asíntotas en $x=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ \ n\in\mathbb{Z}$

FUNCIÓN COTANGENTE

$$\text{Ctg}:\mathbb{R}-\{x/x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\}\to/f(x)=\text{Ctg}(x)\ .$$

Al colocar en el plano cartesiano los valores de la función tangente con $x\in[0,\pi]$, dibujamos un ciclo de la función y, al aumentar los ciclos hacia la izquierda y derecha, obtenemos la gráfica de la función cotangente representada en la figura 7.5.

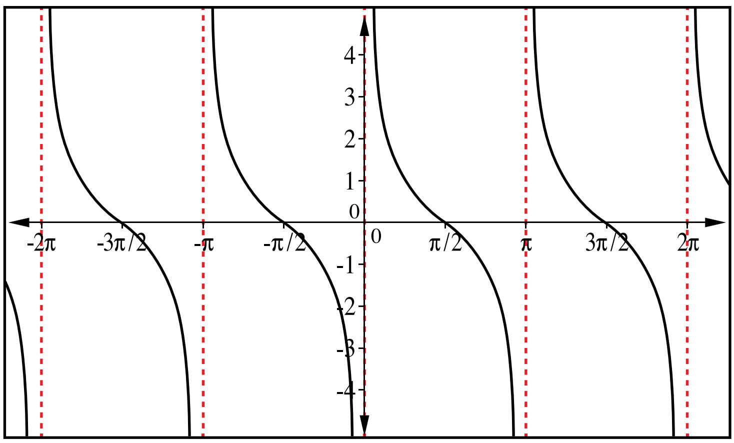


Figura 7.5. Gráfica de la función cotangente

La función cotangente tiene por dominio $\mathbb{R}-\{x/x=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\}$ y de recorrido a los reales; es una función impar, esto es se cumple que $Ctg(-x)=-Ctg(x)$; su período es π , es decir, $Ctg(x+\pi)=Ctg(x)$; tiene asíntotas en $x=n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$ y las intersecciones con el eje x son: $\frac{\pi}{2}+n\pi,\ \ n\in\mathbb{Z}$

FUNCIÓN SECANTE

$$\text{Sec} : \mathbb{R} - \left\{ x \,/\, x = \frac{\pi}{2} + \pi\, n ,\ \ n \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}\ \ /\, f(x)\quad \text{Sec}(x)$$

Al colocar en el plano cartesiano los valores de la función secante con $x \in [0,2\pi]$, dibujamos un ciclo de la función y, al aumentar los ciclos hacia la izquierda y derecha, obtenemos la gráfica de la función secante representada en la figura 7.6.

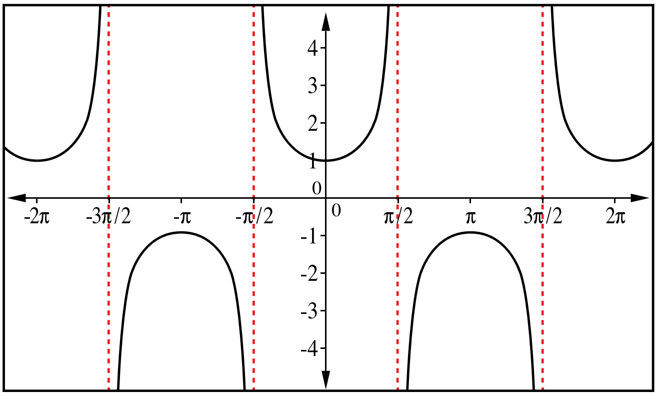


Figura 7.6. Gráfica de la función secante

El dominio de función secante es $\mathbb{R} - \left\{ x \,/\, x = \frac{\pi}{2} + n\pi ,\ \ n \in \mathbb{Z} \right\}$, su recorrido es $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$; es una función par, esto es se cumple que $Sec\,(-x) = Sec(x)$; su periodo es 2π , es decir, $Sec\,(x + 2\pi) = Sec\,(x)$ y tiene asíntotas en $x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

FUNCIÓN COSECANTE

$$\text{Csc} : \mathbb{R} - \{ x \,/\, x = n\pi \,,\, n \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = \text{Csc}(x)$$

Al colocar en el plano cartesiano los valores de la función cosecante con x $\in [0,2\pi]$, dibujamos un ciclo de la función, y al aumentar los ciclos hacia la izquierda y derecha, obtenemos la gráfica de la función secante representada en la figura 7.7.

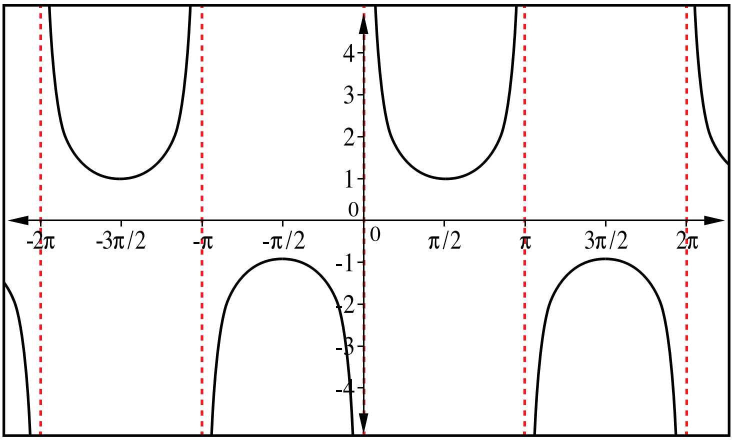


Figura 7.7. Gráfica de la función cosecante

El dominio de función cosecante es $\mathbb{R} - \{ x \,/\, x = n\pi \,,\, n \in \mathbb{Z}$, su recorrido es $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$; es una función impar, esto es se cumple que $Csc\,(-\,x) = -\,Csc(x)$; su período es 2π , es decir, $Sec\,(x + 2\pi) = Sec\,(x)$ y tiene asíntotas en $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

7.3. Gráficas de funciones trigonométrica especiales

Consideremos las funciones trigonométricas de la forma $f\,(x) = a\ Sen(bx + c)$ y $f\,(x) = a\ \ Cos(bx + c)$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Definimos al valor de $f\,(x)$ más grande de la función, como amplitud, y está dado por $|a|$. Para hallar el periodo de las funciones lo haremos a partir de la expresión $\dfrac{2\pi}{|b|}$

Para hallar cuanto se desplaza la gráfica de la función con respecto al origen (conocido como desplazamiento de fase) se resuelve la ecuación $bx + c = 0$; si $x = -\dfrac{c}{b} < 0$,la gráfica de la función se desplaza hacia la izquierda y si $x = -\dfrac{c}{b} > 0$ la gráfica de la función se desplaza hacia la derecha.

Para determinar el intervalo en el que la función cumple un ciclo (una onda-senoidal o cosenoidal), se deben resolver las ecuaciones: $bx + c = 0$ y $bx + c = 2\pi$

Entonces el intervalo en el que la función cumple un ciclo esta dado por:

$$\left[-\frac{c}{b},\frac{2\pi-c}{b}\right]$$

Ejemplos

Construir la gráfica, hallar la amplitud, período, intervalo en el que la función cumple un ciclo (**una onda senoidal o cosenoidal**) y el desplazamiento de fase, de las siguientes funciones:

1) $f(x)=3\ Sen\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

La amplitud es $|3|=3$, el período es $\dfrac{2\pi}{|2|}=\pi$, para encontrar el desplazamiento de fase y el intervalo que contenga exactamente un ciclo, resolver las ecuaciones: $2x+\dfrac{\pi}{2}=0\ \Rightarrow\ x=-\dfrac{\pi}{4}$ y $2x+\dfrac{\pi}{2}=2\pi\ \Rightarrow\ x=\dfrac{3\pi}{4}$, entonces el desplazamiento de fase es $-\dfrac{\pi}{4}$ y hay una onda senoidal de amplitud 3 en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

Para construir la gráfica, procedemos de la siguiente manera:

$$2x+\frac{\pi}{2}=0\quad\Rightarrow\quad x=-\frac{\pi}{4}\ ,\quad y=3\text{Sen }(0)=0\quad\Rightarrow\quad P_1\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$$

$$2x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad x=0\ ,\quad y=3\text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\quad\Rightarrow\quad P_2\left(0,3\right)$$

$$2x+\frac{\pi}{2}=\pi\quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{4}\ ,\quad y=3\text{Sen }(\pi)=0\quad\Rightarrow\quad P_3\left(\frac{\pi}{4},0\right)$$

$$2x+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}\ ,\quad y=3\text{Sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3\quad\Rightarrow\quad P_4\ \frac{\pi}{2},-3$$

$$2x+\frac{\pi}{2}=2\pi\quad\Rightarrow\quad x=\frac{3\pi}{4}\ ,\quad y=3\text{Sen }(2\pi)=0\quad\Rightarrow\quad P_5\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$$

Ubicamos los puntos hallados y construimos la gráfica de la función. Con un proceso análogo, se puede desplazar hacia la derecha e izquierda (ver figura 7.8).

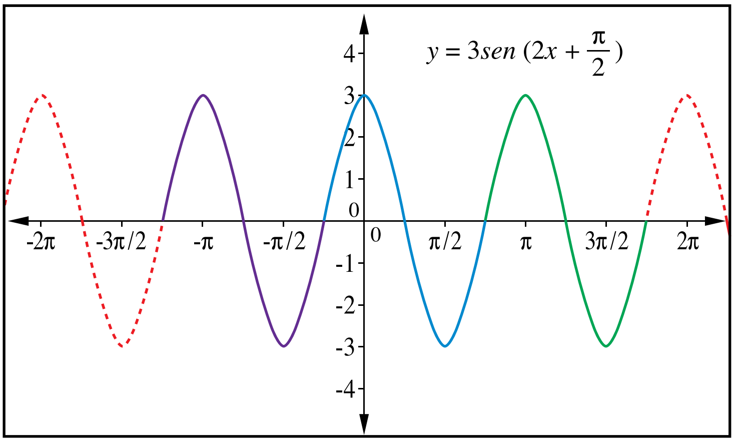


Figura 7.8. Gráfica de la función trigonométrica ejemplo 1

2. $f(x) = -4\,Cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$

La amplitud es $|-4| = 4$, el período es $\frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$. Para encontrar el desplazamiento de fase y el intervalo que contenga exactamente un ciclo, resolver las ecuaciones: $3x + \frac{3\pi}{4} = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$ y $3x + \frac{3\pi}{4} = 2\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}$; entonces el desplazamiento de fase es $-\frac{\pi}{4}$ y hay una onda cosenoidal de amplitud 4 en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}\right]$

Para construir la gráfica procedemos de la siguiente manera:

$$3x + \frac{3\pi}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4}\,, \quad y = -4Cos\,(0) = -4 \quad \Rightarrow \quad P_1\left(-\frac{\pi}{4}, -4\right)$$

$$3x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{12}\,, \quad y = -4Cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_2\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$$

$$3x + \frac{3\pi}{4} = \pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{12}\,, \quad y = -4Cos\left(\pi\right) = 4 \quad \Rightarrow \quad P_3\left(\frac{\pi}{12}, 4\right)$$

$$3x+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{4} \quad , \quad y=-4Cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0 \Rightarrow \quad P_4\left(\frac{\pi}{4},0\right)$$

$$3x+\frac{3\pi}{4}=2\pi \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5\pi}{12} \quad , \quad y=-4Cos\left(2\pi\right)=-4 \quad \Rightarrow \quad P_5\left(\frac{5\pi}{12},-4\right)$$

Luego ubicamos los puntos hallados para construir la gráfica de la función y con un proceso análogo se puede desplazar hacia la derecha e izquierda (ver figura 7.9).

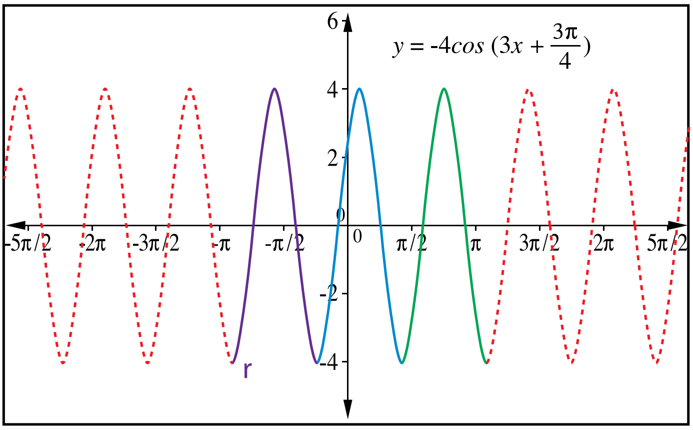


Figura 7.9. Gráfica de la función trigonométrica ejemplo 2

El proceso anterior se debe aplicar para construir las gráficas de las funciones trigonométricas de los ejemplos 3 y 4.

3. $f(x)=3\ Sen\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)$

4. $f(x)=-2\ Cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

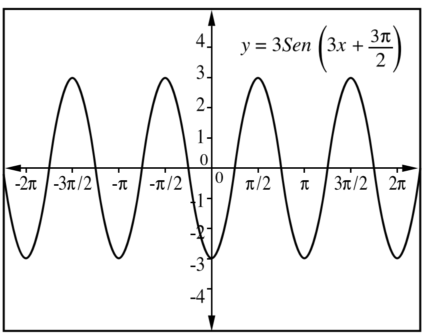


Figura 7.10. Gráfica de la función trigonométrica ejemplo 3

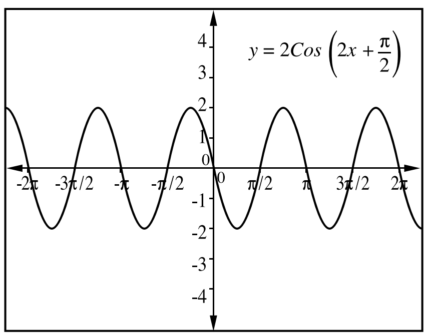


Figura 7.11. Gráfica de la función trigonométrica ejemplo 4

Consideremos la función trigonométrica de la forma $f(x) = a$ Tag$(bx + c)$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Para hallar el período de la función lo haremos a partir de la expresión $\frac{\pi}{|b|}$.

Para determinar el desplazamiento de fase, se resuelve la ecuación $bx + c = 0$; si $x = -\frac{c}{b} < 0$, la gráfica de la función se desplaza hacia la izquierda, y si $x = -\frac{c}{b} > 0$, la gráfica de la función se desplaza hacia la derecha.

Para determinar el intervalo en el que la función cumple un ciclo se deben resolver las ecuaciones:

$$bx + c = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad bx + c = \frac{\pi}{2}$$

Entonces el intervalo en el que la función cumple un ciclo está dado por:

$$\left[-\frac{\frac{\pi}{2} + c}{b}, \frac{\frac{\pi}{2} - c}{b} \right]$$

Ejemplos.

Construir la gráfica, hallar el período, el desplazamiento fase y el intervalo en el que las funciones cumplen un ciclo.

1. $f(x) = 3\,Tag\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

El período es $\frac{\pi}{|1|} = \pi$; el desplazamiento de fase es $-\frac{c}{b} = -\frac{\frac{\pi}{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}$

Para hallar las asíntotas verticales sucesivas, resolvemos las ecuaciones:

$$x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x = -\frac{5\pi}{6} \qquad y \qquad x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{6}$$

Entonces la función cumple un ciclo en el intervalo $\left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

Para construir la gráfica de la función procedemos de la siguiente manera:

$$x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{5\pi}{6} \quad , \quad y=3\text{Tag}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\infty \quad \Rightarrow \quad P_1\left(-\frac{5\pi}{6},\infty\right)$$

$$x+\frac{\pi}{3}=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{\pi}{3} \quad , \quad y=3\text{Tag}(0)=0 \quad \Rightarrow \quad P_2 \quad -\frac{\pi}{3},0$$

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{6} \quad , \quad y=3\text{Tag}\ \frac{\pi}{2}=\infty \quad \Rightarrow \quad P_3 \quad \frac{\pi}{6},\infty$$

Luego ubicamos los puntos hallados para construir la gráfica de la función y con un proceso análogo se puede desplazar hacia la derecha e izquierda, ver figura 7.12.

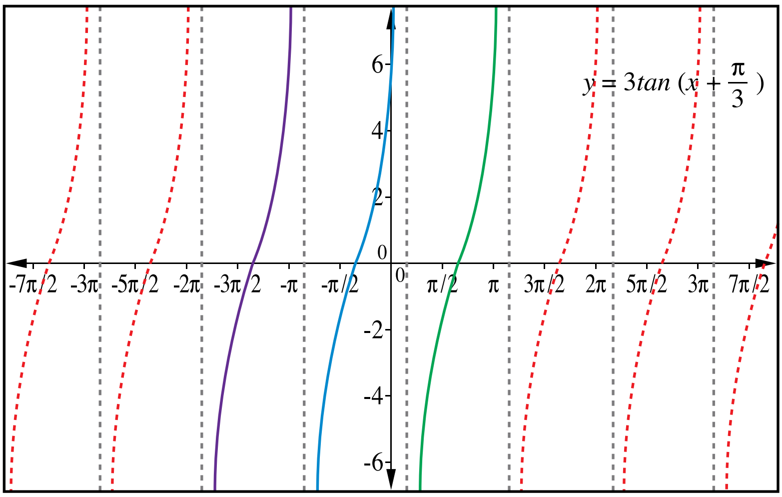


Figura 7.12. Gráfica de la función trigonométrica, ejemplo 1

El proceso anterior se debe aplicar para construir las gráficas de las funciones trigonométricas de los ejemplos 2 y 3.

2. $f(x)=\frac{1}{5}Tag\left(x+\frac{7\pi}{6}\right)$

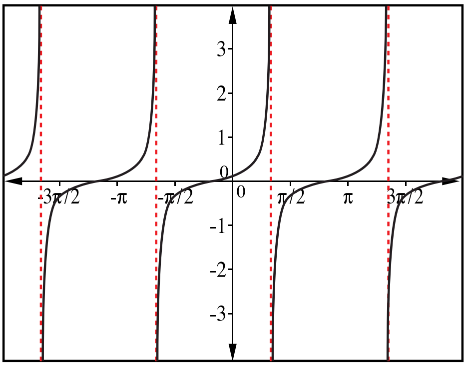


Figura 7.13. Gráfica trigonométrica de ejemplo 2

3. $f(x)=\frac{2}{5}Tag\left(x-\frac{7\pi}{10}\right)$

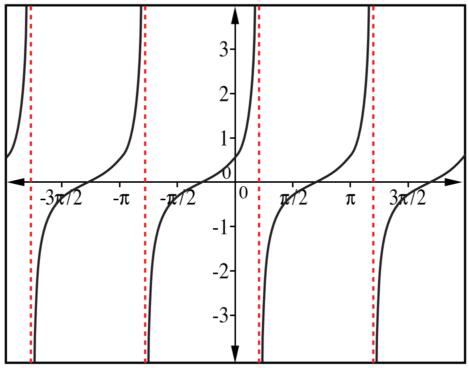


Figura 7.14. Gráfica trigonométrica de ejemplo 3

Para graficar $f(x) = a\ Ctg(bx + c)$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$; el período de la función lo hallaremos a partir de la expresión $\frac{\pi}{|b|}$. Para determinar el desplazamiento de fase se resuelve la ecuación $bx + c = 0$; si $x=-\frac{c}{b}<0$ la gráfica se desplaza hacia la izquierda y, si $x=-\frac{c}{b}>0$, la gráfica se desplaza hacia la derecha. Para encontrar el intervalo en el que la función cumple un ciclo, se deben resolver las ecuaciones:

$$bx + c = 0 \quad \text{y} \quad bx + c = \pi$$

Entonces el intervalo en el que la función cumple un ciclo es : $\left[-\frac{c}{b}, \frac{\pi-c}{b}\right]$

Para construir las gráficas de las funciones trigonométricas $f(x) = a\ Sec(bx + c)$ y $f(x) = a\ Csc(bx + c)$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, $b \neq 0$; se construyen las gráficas de $f(x) = a\ Cos(bx + c)$ y $f(x) = a\ Sen(bx + c)$, se toman los recíprocos, se grafican las asíntotas y finalmente se construye la gráfica.

Ejemplos

1. $f(x)=Sec\left(2x-\frac{5\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{Cos\left(2x-\frac{5\pi}{3}\right)}$

Con los procedimientos vistos, graficamos $y = Cos\left(2x - \frac{5\pi}{3}\right)$ tomamos los recíprocos, graficamos las asíntotas $2x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + n\pi \;\Rightarrow\; x = \frac{(13+6n)\pi}{12}$, $n \in \mathbb{Z}$ y construimos la gráfica de $y = Sec\left(2x - \frac{5\pi}{3}\right)$, representada en la figura 7.15.

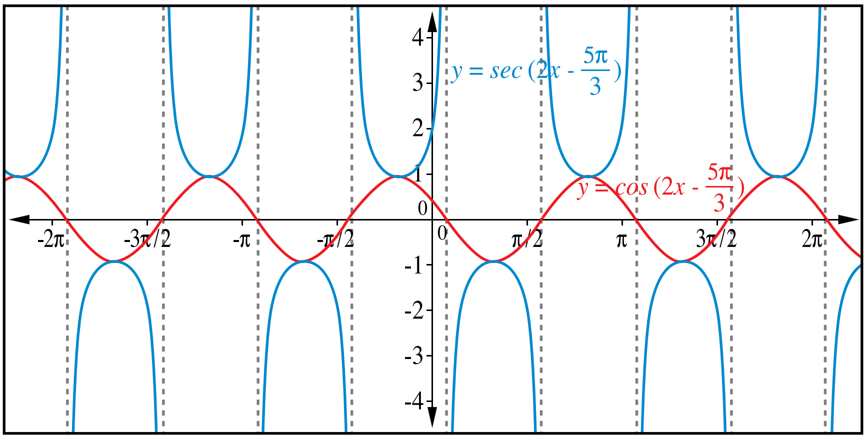


Figura 7.15. Gráfica trigonométrica de ejemplo 1

2. $f(x) = -Sec\left(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{7}\right) = \dfrac{1}{-Sen\left(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{7}\right)}$

Con los procedimientos conocidos, graficamos $y = -Sen\left(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{7}\right)$, tomamos los recíprocos, graficamos las asíntotas $\frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{7} = n\pi \;\Rightarrow\; x = \frac{2(7n-3)\pi}{21}$, $n \in \mathbb{Z}$ y construimos la gráfica de $y = -Sec\left(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{7}\right)$, representada en la figura 7.16.

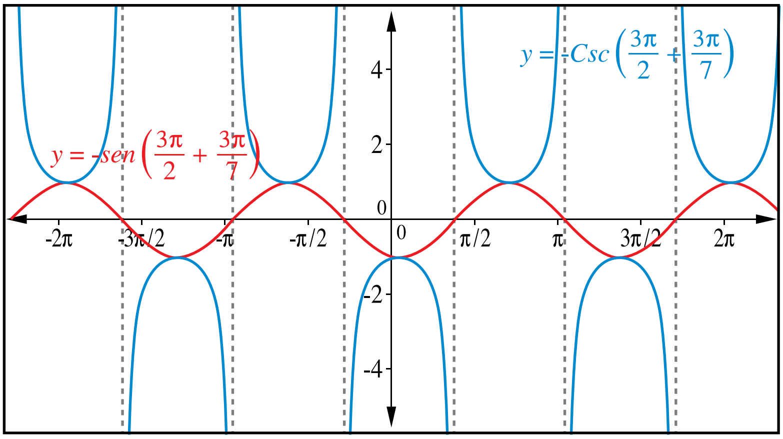


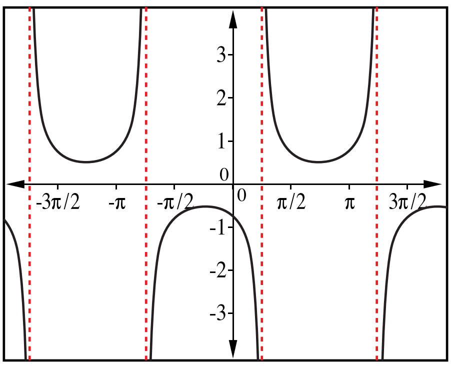
Figura 7.16. Gráfica trigonométrica de ejemplo 2

NOTA: dado que la función secante es el recíproco del seno, para hallar las asíntotas, tomamos los valores de x en los que la función seno se hace cero, que son: $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Este razonamiento se aplicó para hallar las asíntotas de ejemplo anterior.

Con procesos análogos, construimos las gráficas de las funciones trigonométricas de los ejemplos siguientes:

3. $f(x) = \frac{1}{3}\, Sec\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$

4. $f(x) = Cos\,(2x) - 2\,Cos\,(4x) - 3\,Sen\,(3x)$



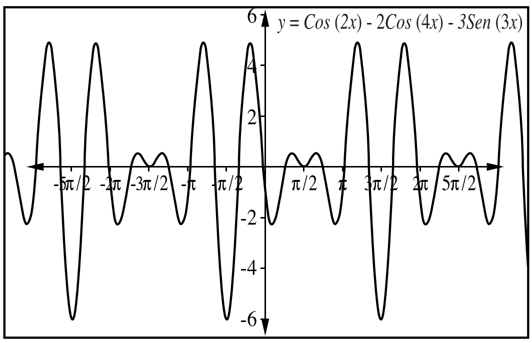


Figura 7.17. Gráfica trigonométrica de ejemplo 3   Figura 7.18. Gráfica trigonométrica de ejemplo 4

5. $f(x) = -|Sen(2x) - 1| - Cos\,(8x)$

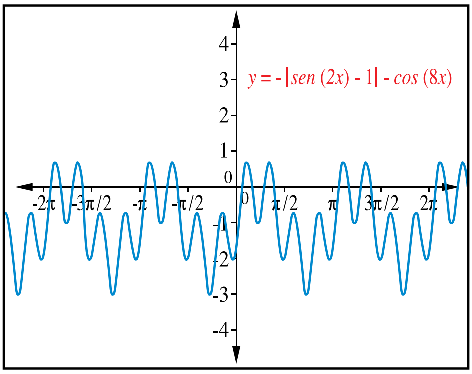


Figura 7.19. Gráfica trigonométrica de ejemplo 5

6. $f(x) = |Sen(2x) - 1| - Cos\,(4x)$

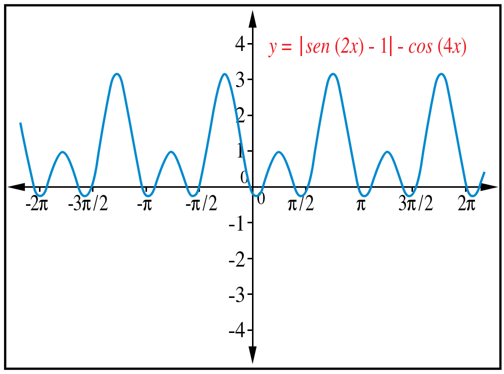


Figura 7.20. Gráfica trigonométrica de ejemplo 6

EJERCICIOS PROPUESTOS 7.1

a) Graficar las siguientes funciones trigonométricas y hallar el período, la amplitud, desplazamiento de fase, el intervalo donde la función cumple un ciclo, asíntotas, y analizar la monotonía en el intervalo donde la función cumple un ciclo.

1. $f(x) = Sen\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) - 2$

2. $f(x) = -3Sen\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) + 5$

3. $f(x) = -5Cos\left(3x - \dfrac{3\pi}{5}\right)$

4. $f(x) = 2Cos\left(4x - \dfrac{7\pi}{2}\right)$

5. $f(x) = -3Tag\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{4\pi}{3}\right)$

6. $f(x) = 2Tag\left(\dfrac{3x}{4} - \dfrac{9\pi}{10}\right) - 1$

7. $f(x) = -2Sec\left(7x + \dfrac{7\pi}{6}\right) + \dfrac{3}{2}$

8. $f(x) = -3Ctg\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{5\pi}{4}\right)$

9. $f(x) = \left|Csc\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{10}\right)\right| - \dfrac{1}{2}$

10. $f(x) = -Sen\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$

11. $f(x) = -4Cos\left(-2x - \dfrac{3\pi}{5}\right)$

12. $f(x) = Sec\left(6x + \dfrac{9\pi}{5}\right) - 3$

13. $f(x) = -\left|2Csc\left(4x - \dfrac{7\pi}{2}\right)\right| + 5$

14. $f(x) = -3Sec\,(3x - \pi) + 4$

15. $f(x) = 2\text{Sen}(3x) - 3\text{Cos}(x + 2\pi) - 3$

16. $f(x) = \text{Sen}(3x)\text{Cos}(3x)$

17. $f(x) = -2\text{Sen}^2(x + \pi) - 2\text{Cos}^2(x + \pi) + 5$

18. $f(x) = \text{Tag}(3x)\text{Ctag}(3x) + 2$

19. $f(x) = 2\text{Sec}(2x) - 3Csc(x - \pi)$

20. $f(x) = \text{Sec}^2(3x) - Tag^2(3x) - 3$

21. $f(x) = \sqrt{3}\text{Csc}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$

22. $f(x) = \sqrt{3}\text{Cos}\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$

23. $f(x) = -2Sen\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) + 3$

24. $f(x) = -5\text{Cos}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$

25. $f(x) = 3\text{Csc}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

26. $f(x) = 2Sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$

27. $f(x) = -\frac{3}{2}\text{Sen}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

28. $f(x)$ -4Sec (5x-π)+5.

29. $f(x)$ -3Ctg (3x-2 π)+2.

30. $f(x) = -4Tag\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$

b) Los siguientes cuadros muestran un resumen de las características de las funciones trigonométricas. Complételo:

Características	$\frac{1}{2}$ Sen (-x)	$\frac{1}{2}$ Cos (-x)	$\frac{1}{2}$ Tag (-x)	$\frac{1}{2}$ Ctg (-x)	$\frac{1}{2}$ Sec (-x)	$\frac{1}{2}$ Csc (-x)
Dominio						
Recorrido						
Amplitud						
Período						
Desfase						
Asíntotas						
Par o impar						
Simetría						
Intersección con el eje x						

Tabla 7.1. Tabla de llenado con las características de varias funciones trigonométricas

Características	-2 Sen (2x)	3 Cos (-2x)	4 Tag (3x)	- Ctg (4x)	2 Sec (-π x)	-3 Csc (-π x)
Dominio						
Recorrido						
Amplitud						
Período						
Desfase						
Asíntotas						
Par o impar						
Simetría						
Intersección con el eje *x*						

Tabla 7.2. Tabla de llenado con las características de varias funciones trigonométricas

7.4. Funciones trigonométricas inversas

Para definir la inversa de una función es necesario que esta sea biyectiva. Ya que ninguna de las funciones trigonométricas es biyectiva, para el estudio de las inversas restringiremos sus dominios.

7.4.1. Función seno inversa

Para que la **función seno** sea biyectiva (ver figura 7.21), la definiremos de la siguiente manera: $sen:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\rightarrow[-1,1]\ /\ y=sen\,(x)$

La función inversa del seno (ver figura 7.22), es la función arcoseno, y se denota por $sen^{-1}x$ o por *arcsen x* y la definiremos de la siguiente manera:

$$arcsen:[-1,1]\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]/\ y=arcsen(x)$$

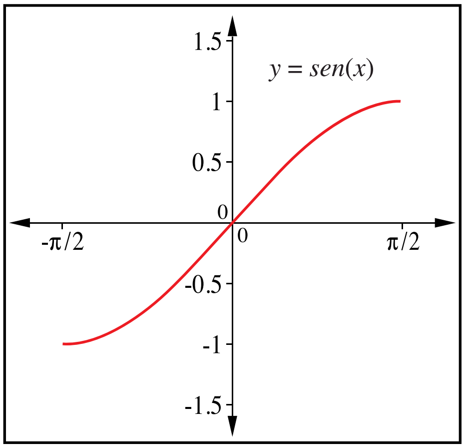


Figura 7.21. Gráfica de función seno en un intervalo

Para construir la gráfica en el *software* GeoGebra u otros, lo que ingresamos es $y = arcsen\ (x)$

Propiedades para $arcsen\ (x)$

a) $sen\ (arcsen\ (x)) = x$ si $-1 \leq x \leq 1$

b) $arcsen\ (\ sen\ (y)) = y$ si $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

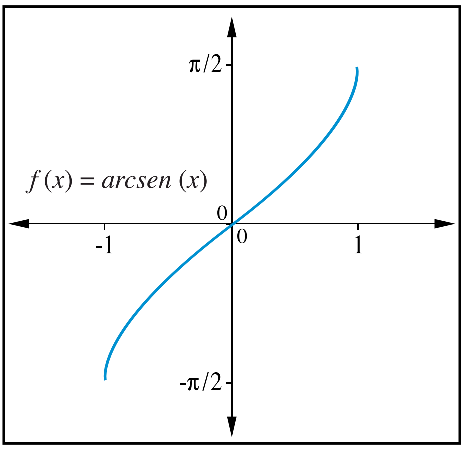


Figura 7.22. Gráfica de función arcoseno

Ejemplos

1. Hallar el valor exacto de $sen\left(arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

Aplicando la propiedad tenemos que $sen\left(arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ya que $-1<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$

2. Hallar el valor exacto de y si: $y=arcsen\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

Primero hallemos el valor de $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$, y luego determinamos el seno inverso de ese número, es decir: $y=arcsen\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)=arcsen\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$

3. Hallar el valor exacto de y si: $y=arcsen\left(ctg\left(\frac{17\pi}{3}\right)\right)$

Hallemos el valor de $ctg\left(\frac{17\pi}{3}\right)=ctg\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-ctg\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y luego determinamos el seno inverso de ese número, es decir: $y=arcsen\left(\mathrm{ctg}\left(\frac{17\pi}{3}\right)\right)=arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-35.26^\circ$

7.4.2. Función coseno inversa

Para que la función coseno sea biyectiva (ver figura 7.23), la definiremos de la siguiente manera:

$$\cos:[0,\pi]\rightarrow[-1,1]\ /\ y=\cos(x)$$

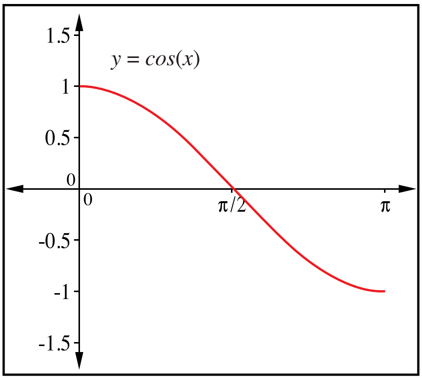


Figura 7.23. Gráfica de unción coseno en un intervalo

La función inversa del coseno (ver figura 7.24), es la función arcocoseno, y se denota por $cos^{-1}\ x$ o por *arccos x* y la definiremos de la siguiente manera:

$$\text{arccos} : [-1,1] \rightarrow [0,\pi\ ] /\ y = \text{arccos}(x)\ .$$

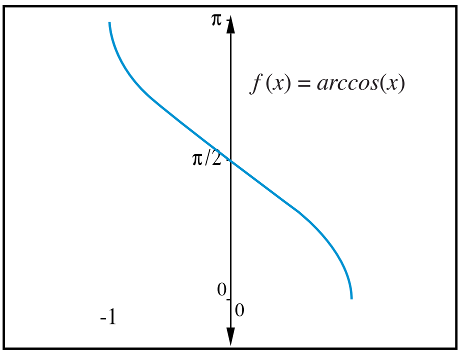


Figura 7. 24. Gráfica de función arcocoseno

Para construir la gráfica en el *software* GeoGebra u otros, lo que ingresamos es $y = \text{arccos}\ (x)$

Propiedades para *arccos (x)*

a) $\cos\ (\text{arccos}\ (x)) = x$ si $-1 \leq x \leq 1$

b) $\text{arccos}\ (\cos\ (y)) = y$ si $0 \leq y \leq \pi$

Teorema 7.1. Para todo $x \in [-1, 1]$ se cumple que:

a) $\operatorname{sen}(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$

b) $\cos(\operatorname{arcsen} x)=\sqrt{1-x^2}$

Ejemplos.

1. Hallar el valor exacto de $\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

Aplicando la propiedad tenemos que $\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}$ ya que $-1<\frac{1}{2}<1$

2. Hallar el valor exacto de y si: $y=\arccos\left(sen\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

Primero hallemos el valor de $sen\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ y luego determinamos el coseno inverso de ese número, es decir: $y=\arccos\left(sen\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$

3. Hallar el valor exacto de **y** si: $y=arccos\left(sec\left(\frac{11\pi}{3}\right)\right)$

Hallemos el valor de $sec\left(\frac{11\pi}{3}\right)=sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)=sec\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$

Luego determinamos el coseno inverso de ese número, es decir:

$$y=\arccos\left(sec\left(\frac{11\pi}{3}\right)\right)=\arccos(2)$$

La ecuación no tiene solución porque el argumento de arcoseno no está comprendido entre -1 y 1.

4. Hallar el valor exacto de y si: $y = \arccos\left(ctg\left(\frac{35\pi}{3}\right)\right)$

Hallemos el valor de $ctg\left(\frac{35\pi}{3}\right) = ctg\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -ctg\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Luego determinamos el coseno inverso de ese número, es decir:

$$y = \arccos\left(\text{ctg}\left(\frac{35\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 125.26^{\circ}$$

7.4.3. Función tangente inversa

Para que la **función tangente**, sea biyectiva (ver figura 7.25), la definiremos de la siguiente manera:

$$\text{tag}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \,/\, y = tag(x)$$

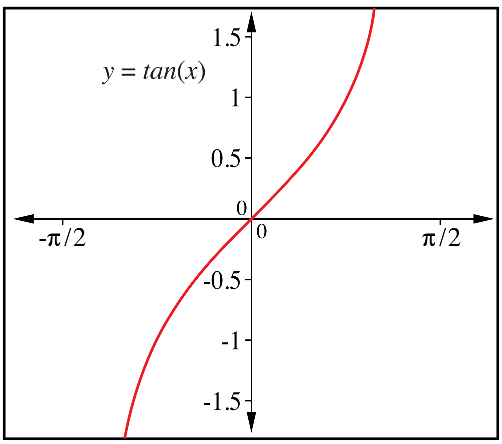


Figura 7.25. Gráfica de función tangente en un intervalo

La función inversa de la tangente (ver figura 5.26), es la función arcotangente y se denota por $tag^{-1}x$ o por $arctagx$ y la definiremos de la siguiente manera:

$$\text{arctag}: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] / \; y = arctag(x)$$

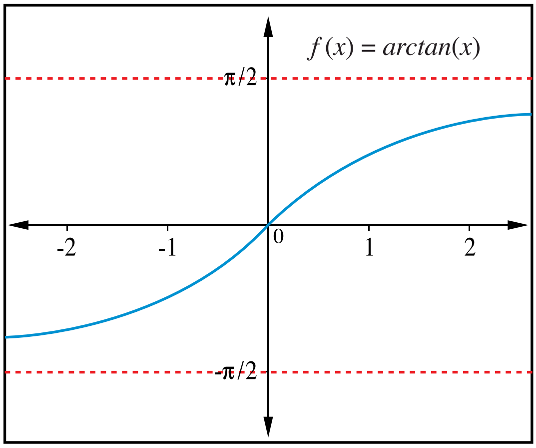


Figura 5.26. Gráfica de función arcotangente

Para construir la gráfica en el *software* GeoGebra u otros, lo que ingresamos es $y = arctag(x)$.

Propiedades para $arctag(x)$

a) $tag\,(arctag(x)) = x, \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $arctag\,(tag\,(y)) = \text{y si } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Teorema 7.2. Para todo x que pertenece a $\mathbb{R}$, se cumple que:

$$sen\left(arctag(x)\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ejemplos

1. Hallar el valor exacto de $tag\,(arctag\,(\sqrt{3}))$

Aplicando la propiedad tenemos que tag $(arctag\,(\sqrt{3})) = \sqrt{3}$

2. Hallar el valor exacto de y si: $y = arctag\left(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right)$

Primero hallemos el valor de $\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)$, y luego determinamos inverso de ese número, es decir: $y = arctag\left(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right) = arctag\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}57^\circ$

3. Hallar el valor exacto de y si: $y = arctag\left(ctg\left(\frac{19\pi}{3}\right)\right)$

Hallemos el valor de $ctg\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{tag\left(\frac{19\pi}{3}\right)} = 0{,}5774$

Ahora determinemos la tangente inversa de ese número, es decir:

$$y = arctag\left(\text{ctg}\left(\frac{19\pi}{3}\right)\right) = arctag\,(0.5774) = 30^\circ$$

7.4.4. Función cotangente inversa

Para que la función cotangente sea biyectiva (ver figura 7.27), la definiremos de la siguiente manera:

$$ctg : [0, \pi\,] \to \mathbb{R} /\ y = ctg(x)$$

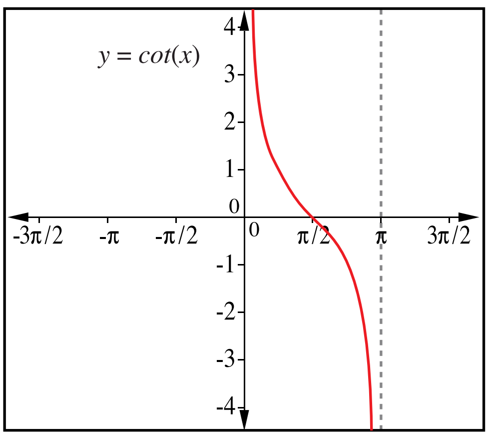


Figura 7.27. Gráfica de función cotangente en un intervalo

La función inversa de la cotangente (ver figura 5.28), es la función arcocotangente, y se denota por $ctg^{-1}x$ o por $arcctgx$, la definiremos de la siguiente manera:

$$arcctg : \mathbb{R} \rightarrow [0,\pi] \ / \ y = arcctg(x)$$

Teorema 7.3.

a) $ctg\left(arctag(x)\right) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$

b) $tag\left(arcctg(x)\right) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$

c) $\cos\left(arctag(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

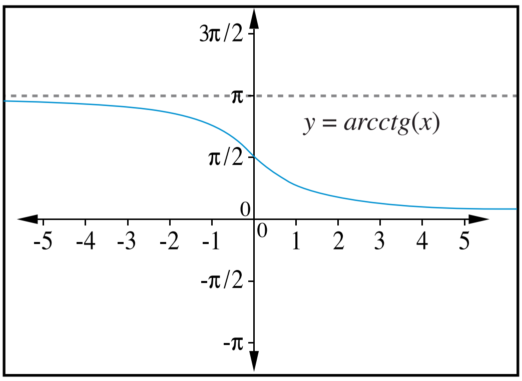


Figura 5.28. Gráfica de función arcocotangente

SOFWARE GEOGEBRA

Para construir la gráfica en el *software* GeoGebra, digitamos ***función*** y aparecerá: ***Función***[<***Función***>, <***Valor inicial***>, <***Valor final***>] luego escribimos:

$$\text{Función}\left[\frac{\pi}{2} - arctag(x), -10,\ 10\right]$$

Ejemplos.

1. Hallar el valor exacto de arcctg ($\sqrt{3}$)

Si a la expresión dada le igualamos a un valor y , le aplicamos la tangente a ambos lados y por el literal a) del teorema anterior, obtenemos:

$$y = arcctg\left(\sqrt{3}\right) \Rightarrow tag\ (y) = tag\left(arcctg\left(\sqrt{3}\right)\right) \Leftrightarrow tag\ (y) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = tag^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ$$

2. Hallar el valor exacto de y si: $y = arcctg\left(sen\left(\frac{17\pi}{3}\right)\right)$

Hallemos el valor de $sen\left(\frac{17\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y determinamos la cotangente inversa de ese número, es decir:

$$y = arcctg\left(sen\left(\frac{17\pi}{3}\right)\right) = arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \ \mathrm{ctg}(y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{tag(y)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tag}(y) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \mathrm{y} = arctag\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -49.11^\circ.$$

7.4.5. Función secante inversa

Para que la función secante sea biyectiva (ver figura 7.29), la definiremos de la siguiente manera:

$$\sec : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \rightarrow \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$$

que $y = sec\ (x)$

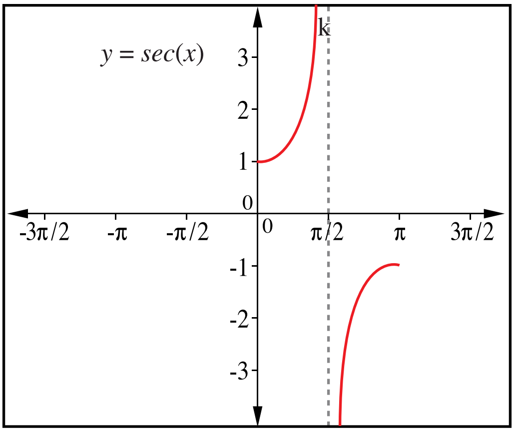


Figura 7.29. Gráfica de función secante en un intervalo

La función inversa de la secante, ver figura 5.30, es la función arcosecante, y se denota por $sec^{-1}\,x$ o por *arcsec x* y la definiremos de la siguiente manera:

$$\operatorname{arc}\sec :]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\;\rightarrow \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$$

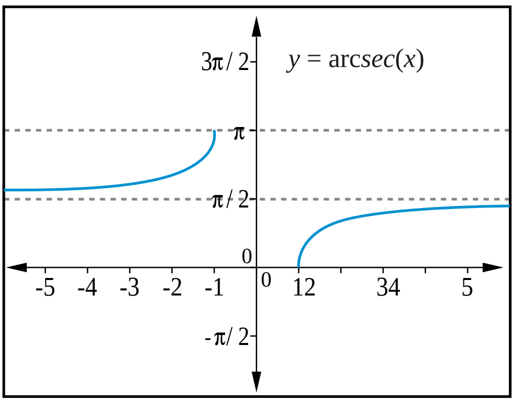


Figura 7.30. Gráfica de función arcosecante

SOFWARE GEOGEBRA

Para construir la gráfica en el software Geogebra, digitamos ***función*** y aparecerá: ***Función***[<***Función***>, <***Valor inicial***>, <***Valor final***>] luego escribimos lo siguiente:

Función $\left[\arccos\left(\frac{1}{x}\right), -10, 1\right]$ para que salga la parte izquierda de la gráfica y para que salga la parte derecha Función $\left[\arccos\left(\frac{1}{x}\right), 1, 10\right]$

7.4.6. Función cosecante inversa

Para que la función cosecante sea biyectiva (ver figura 7.31), la definiremos de la siguiente manera:

$$\operatorname{scc}: \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \to]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

que $y = csc(x)$.

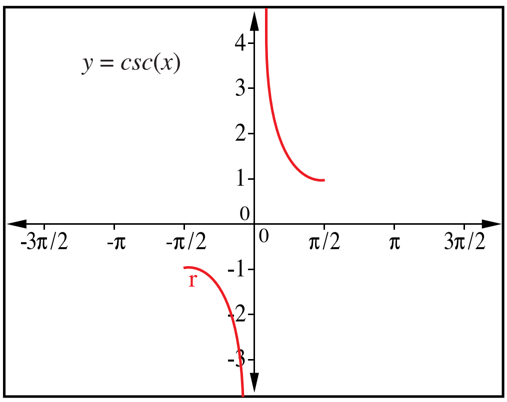


Figura 7.31. Gráfica de función cosecante en un intervalo

La función inversa de la cosecante (ver figura 7.32), es la función arcocosecante, y se denota por $\csc^{-1} x$ o por *arccsc x* y la definiremos de la siguiente manera:

$$\operatorname{arc\,sec}:]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\to \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

tal que $y = arc\sec(x)$

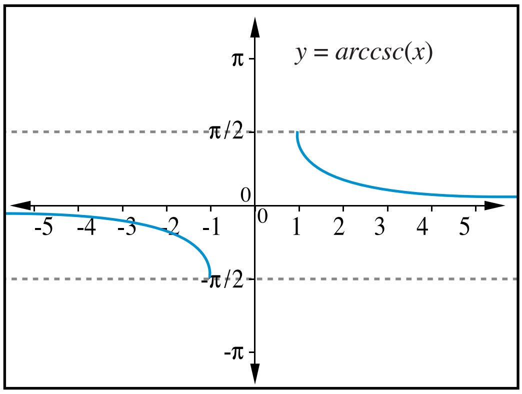


Figura 5.32. Gráfica de función arcocosecante

Teorema 7.4.

a) $arcctg(x) = \dfrac{\pi}{2} - arctag(x)$

b) $arc\sec(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad |x| \geq 1$

c) $arc\csc(x) = \text{arcsen}\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad |x| \geq 1$

SOFWARE GEOGEBRA

Para construir la gráfica en el *software* Geogebra, digitamos ***función*** y aparecerá: ***Función***[<***Función***>, <***Valor inicial***>, <***Valor final***>] y escribimos lo siguiente: $\left[\text{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right), -10,\ 1\right]$ para que salga la parte izquierda de la gráfica y para que salga derecha $\left[\text{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right),\ 1,\ 10\right]$

EJERCICIOS PROPUESTOS 7.2

Hallar el valor exacto de las siguientes expresiones trigonométricas

1. $sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+tag^{-1}(1)$

2. $\sec^{-1}(2)+\csc^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+2ctg^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

3. $3sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+tag^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$

4. $5\csc^{-1}\left(\sqrt{2}\right)-\frac{3}{4}ctg^{-1}(1)$

5. $y=arcsen\left(\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)\right)$

6. $y=\cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

7. $y=\arccos\left(sen\left(\frac{16\pi}{5}\right)\right)$

8. $\frac{2}{3}tag\left(arcctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)-\frac{5}{7}\arccos\left(\sec\left(\frac{35\pi}{3}\right)\right)$

9. $arcctg\left(\cos\left(\frac{37\pi}{3}\right)\right)-4\,sen\left(arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

10. $arcctg\left(ctg\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)-3arcsen\left(\frac{3}{5}\right)-5arc\sec\left(-\frac{8}{5}\right)$

11. $arcctg\left(ctg\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)-3arcsen\left(\frac{3}{5}\right)-5arc\sec\left(-\frac{8}{5}\right)$

12. $2\,arcctg\left(\sqrt{7}\right)+7\,arcctg\left(sen\left(\frac{47\pi}{6}\right)\right)-ar\cos\left(\frac{1}{2}\right)$

13. $5\,arctg\,(3)-6\arccos\left(sen\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)-arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

14. $4\arccos\left(\frac{1}{5}\right)+3\,arcsen\left(\frac{2}{9}\right)-arctag(9)-5arc\csc\left(\frac{17}{6}\right)$

15. $7\,arcsen\left(sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)+3\,arcsen\left(tag\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)-2arctag\left(ctg\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

7.5. Identidades trigonométricas

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Una identidad trigonométrica es una igualdad que es verdadera para todos los valores de los ángulos para los cuales están definidas las funciones.

1. $Cos^2\,\alpha + Sen^2\,\alpha\ = 1$

La demostración de la identidad la hacemos a partir del circulo trigonométrico de radio 1 (ver figura 5.26), se tiene que: $Cos\,\alpha\ = \frac{x}{1} = x$, $Sen\,\alpha\ = \frac{y}{1} = y$ y por el teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = 1$ al reemplazar la equivalencias de x e y se tiene que: $Cos^2\,\alpha + Sen^2\,\alpha = 1$

2. $Tag^2\ \alpha + 1 = Sec^2\ \alpha$

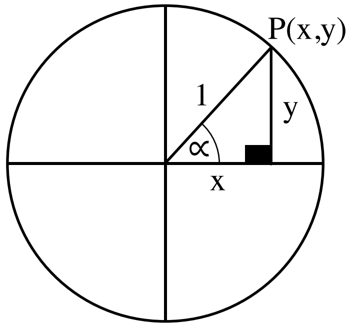


Figura 7. 33. Círculo de radio 1

Si a la identidad trigonométrica fundamental $Cos\ 2\alpha + Sen\ 2\alpha = 1$ dividimos para $Cos\ 2\alpha$ cada uno de los miembros se tiene que:

$$\frac{Cos^2\alpha}{Cos^2\alpha} + \frac{Sen^2\alpha}{Cos^2\alpha} = \frac{1}{Cos^2\alpha}$$

Sabiendo que $Tag\alpha = \dfrac{Sen\alpha}{Cos\alpha}$ y $Sec\alpha = \dfrac{1}{Cos\alpha}$

obtenemos $1 + Tag^2\ \alpha = Sec^2\ \alpha$

3. $Ctg^2\ \alpha + 1 = Csc^2\ \alpha$

A la identidad trigonométrica fundamental $Cos^2\alpha + Sen^2\alpha = 1$ dividimos para $Sen^2\alpha$ cada uno de los miembros $\dfrac{Cos^2\alpha}{Sen^2\alpha} + \dfrac{Sen^2\alpha}{Sen^2\alpha} = \dfrac{1}{Sen^2\alpha}$ y sabiendo que $Ctg\alpha = \dfrac{Cos\alpha}{Sen\alpha}$ y $Csc\alpha = \dfrac{1}{Sen\alpha}$ obtenemos $Ctg^2\ \alpha + 1 = Csc^2\ \alpha$

IDENTIDADES DE LA SUMA Y DIFERENCIA

$$\text{Sen}(\alpha+\beta) = \text{Sen}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta + \text{Sen}\,\beta\,\text{Cos}\,\alpha$$

$$\text{Sen}(\alpha-\beta) = \text{Sen}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta - \text{Sen}\,\beta\,\text{Cos}\,\alpha$$

$$\text{Cos}(\alpha+\beta) = \text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta - \text{Sen}\,\alpha\ \text{Sen}\,\beta$$

$$\text{Cos}\,(\alpha-\beta) = \text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta + \text{Sen}\,\alpha\ \text{Sen}\,\beta$$

$$Tag\ (\alpha+\beta) = \frac{Tag\,\alpha + Tag\,\beta}{1 - Tag\,\alpha\, Tag\,\beta}$$

$$Tag\ (\alpha-\beta) = \frac{Tag\,\alpha - Tag\,\beta}{1 + Tag\,\alpha\, Tag\,\beta}$$

$$Ctg\ (\alpha+\beta) = \frac{Ctg\,\alpha\ Ctg\,\beta - 1}{Ctg\,\beta + Ctg\,\alpha}$$

$$Ctg\ (\alpha-\beta) = \frac{Ctg\,\alpha\ Ctg\,\beta + 1}{Ctg\,\beta - Ctg\,\alpha}$$

IDENTIDADES DE ÁNGULOS DOBLES

$$Sen\ 2\,\alpha = 2\ Sen\,\alpha\ Cos\,\alpha$$

$$Cos\ 2\,\alpha = Cos^2\alpha - Sen^2\alpha = 1 - 2\ Sen^2\alpha = 2\ Cos^2\alpha - 1$$

$$Tag\ 2\,\alpha = \frac{2Tag\,\alpha}{1 - Tag^2\,\alpha}$$

IDENTIDADES DEL ÁNGULO MITAD

$$Sen\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \text{Cos}\ \alpha}{2}}$$

$$Cos\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \text{Cos}\ \alpha}{2}}$$

$$Tag\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \text{Cos}\,\alpha}{1 + \text{Cos}\,\alpha}} = \frac{\text{Sen}\ \alpha}{1 + \text{Cos}\,\alpha}$$

$$Ctg\ \frac{\alpha}{2} = \pm\frac{1 + \text{Cos}\,\alpha}{\text{Sen}\ \alpha} = \pm\frac{\text{Sen}\ \alpha}{1 - \text{Cos}\,\alpha}$$

IDENTIDADES DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE SENOS Y COSENOS

$$Sen\ \alpha = Sen\ \beta = 2\ Sen\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,(\alpha-\beta)$$

$$Sen\ \alpha = Sen\ \beta = 2\ Cos\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \mathrm{Sen}\ \frac{1}{2}\,(\alpha-\beta)$$

$$Cos\ \alpha = Cos\ \beta = 2\ Cos\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,(\alpha-\beta)$$

$$Cos\ \alpha = Cos\ \beta = -2\ Sen\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \mathrm{Sen}\ \frac{1}{2}\,(\alpha-\beta)$$

IDENTIDADES DE PRODUCTOS DE SENOS Y COSENOS

$$2Sen\ \alpha\ Sen\ \beta = Cos\ (\alpha-\beta) - Cos\ (\alpha+\beta)$$

$$2Sen\ \alpha\ Cos\ \beta = Sen\ (\alpha-\beta) + Sen\ (\alpha+\beta)$$

$$2Cos\ \alpha\ Sen\ \beta = -Sen\ (\alpha-\beta) + Sen\ (\alpha+\beta)$$

$$2Cos\ \alpha\ Cos\ \beta = Cos\ (\alpha-\beta) + Cos\ (\alpha+\beta)$$

OTRAS IDENTIDADES

$$Sen\ (-\beta) = -Sen\ (\beta) \qquad Cos\ (-\beta) = Cos\ (\beta)$$

$$Tag\ (-\beta) = -Tag\ (\beta) \qquad Sen\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = Cos\beta$$

$$Cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = Sen\beta \qquad Tag\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = Ctg\beta$$

$$Sen\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = Cos\beta \qquad Cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = -Sen\beta$$

$$Tag\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = -Ctg\beta \qquad Sen\ (\pi-\beta) = Sen\ \beta$$

$Cos(\pi-\beta)=-Cos\,\beta$

$Tag(\pi-\beta)=-Tag\,\beta$

$Sen(\pi+\beta)=-Sen\,\beta$

$Cos(\pi+\beta)=-Cos\,\beta$

$Tag(\pi+\beta)=Tag\,\beta$

$Sen\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)=-Cos\beta$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)=-Sen\beta$

$Tag\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)=Ctg\beta$

$Sen\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)=-Cos\beta$

$Cos\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)=Sen\beta$

$Tag\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)=-Ctg\beta$

$Sen(2\pi-\beta)=-Sen\,\beta$

$Cos(2\pi-\beta)=Cos\,\beta$

$Tag(2\pi-\beta)=-Tag\,\beta$

$Sen(2\pi+\beta)=Sen\,\beta$

$Cos(2\pi+\beta)=Cos\,\beta$

$Tag(2\pi+\beta)=Tag\,\beta$

$Sen(3x)=3Senx-4Sen^3x$

$Cos(3x)=4Cos^3x-3Cosx$

$Sen(4x)=4SenxCosx-8Sen^3xCosx$

$Cos(4x)=8Cos^4x-8Cos^2x+1$

$Sen(5x)=5Senx-20Sen^3x+16Sen^5x$

$Cos(5x)=16Cos^5x-20Cos^3x+5Cosx$

$$Tag(3x)=\frac{3Tagx-Tag^3x}{1-3Tag^2x}$$

$$Tag(3x)=\frac{3Tagx-Tag^3x}{1-3Tag^2x}$$

$$Tag(5x)=\frac{Tag^5x-10Tag^3x+5Tag}{1-10Tag^2x+5Tag^4x}$$

$$Tag(4x)=\frac{4Tagx-4Tag^3x}{1-6Tag^2x+Tag^4x}$$

7.6. Demostración de identidades trigonométricas

En la demostración de identidades trigonométricas que contienen funciones de diversos ángulos, es aconsejable expresar dichas funciones como funciones de ángulos simples. En algunos casos es ventajoso cambiar todas las funciones a senos y cosenos.

Ejemplos

1. Demostrar que $\dfrac{Ctg\,2x\;\; Ctgx}{Ctg\,2x\;\; Ctgx+1}=Cos\;2x$

$$\frac{Ctg\,2x\;\; Ctgx}{Ctg\,2x\;\; Ctgx+1}=\frac{\dfrac{Cos2x}{Sen2x}\cdot\dfrac{Cos\;x}{Sen\;x}}{\dfrac{Cos2x}{\text{Sen2 x}}\cdot\dfrac{Cos\;x}{\text{Sen x}}+1}=\frac{\dfrac{Cos2x\,Cosx}{Sen2x\,Sen\;x}}{\dfrac{\text{Cos2x Cos x}+\text{Sen2x Sen x}}{Sen2x\,Sen\;x}}$$

$$=\frac{Cos\;\;2x\,Cos\;x}{Cos\;\;2x\,Cos\;x+Sen\;\;2x\,Sen\;x}$$

$$=\frac{Cos\;2x\;Cos\;x}{Cos\;(2x-x)}=\frac{Cos\;2x\;Cos\;x}{Cos\;\text{x}}=Cos2x$$

$$\frac{Ctg\,2x\;\; Ctgx}{Ctg\,2x\;\; Ctgx+1}=Cos\;2x \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

2. Demostrar que $\dfrac{Csc(x-y)}{Csc(x+y)}=\dfrac{Ctgy+Ctgx}{Ctgy-Ctgx}$.

$$\frac{Ctgy+Ctgx}{Ctgy-Ctgx}=\frac{\dfrac{Cosy}{Seny}+\dfrac{Cosx}{Senx}}{\dfrac{Cosy}{Seny}-\dfrac{Cosx}{Senx}}=\frac{\dfrac{Cosy\;Senx+Cosx\;Seny}{Seny\;\;Senx}}{\dfrac{Cosy\;Senx-Cosx\;Seny}{Seny\;\;Senx}}=\frac{Cosy\;Senx+Cosx\;Seny}{Cosy\;Senx-Cosx\;Seny}$$

$$=\frac{Senx\;\;(x+y)}{Senx\;\;(x-y)}=\frac{\dfrac{1}{Csc\;\;(x+y)}}{\dfrac{1}{Csc\;\;(x-y)}}$$

$$\frac{Ctgy+Ctgx}{Ctgy-Ctgx}=\frac{Csc(x-y)}{Csc(x+y)} \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

3. Demostrar que $\sqrt{\frac{Csc\alpha-1}{Csc\alpha+1}}=\frac{1-Sen\alpha}{Cos\alpha}$

$$\sqrt{\frac{Csc\alpha-1}{Csc\alpha+1}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{Sen\alpha}-1}{\frac{1}{Sen\alpha}+1}}=\sqrt{\frac{\frac{1-Sen\alpha}{Sen\alpha}}{\frac{1+Sen\alpha}{Sen\alpha}}}=\sqrt{\frac{1-Sen\alpha}{1+Sen\alpha}}=\sqrt{\frac{(1-Sen\alpha)(1-Sen\alpha)}{(1+Sen\alpha)(1-Sen\alpha)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-Sen\alpha)^2}{1-Sen^2\alpha}}=\sqrt{\frac{(1-Sen\alpha)^2}{Cos^2\alpha}}$$

$$\sqrt{\frac{Csc\alpha-1}{Csc\alpha+1}}=\frac{1-Sen\alpha}{Cos\alpha}$$ L.Q.Q.D.

4. Demostrar que $8\ Sen^4\alpha = 3-4\ Cos2\ \alpha + Cos\ 4\ \alpha$

Sabiendo que $Cos2\ \alpha = Cos^2\alpha - Sen^2\ \alpha = 1-2Sen^2\alpha$ y

$Cos4\ \alpha = Cos2(2\ \alpha) = Cos^2 2\ \alpha - Sen^2 2\ \alpha = 1-2Sen^2\ 2\alpha$, la demostración la haremos a partir el lado derecho para llegar al izquierdo.

$$3-4\ Cos2\ \alpha + Cos\ 4\ \alpha = 3-4(1-2Sen2\ \alpha) + (1-2Sen^2 2\ \alpha)$$

$$= 3-4\ (1-2Sen^2\alpha) + \alpha\ [1-2\ (2\ Sen\ \alpha\ Cos\ \alpha)^2]\ \alpha$$

$$= 3-4 + 8\ Sen^2\alpha + 1 - 8Sen^2\alpha\ Cos^2\alpha$$

$$= 8Sen^2\alpha(1-Cos^2\alpha) = 8\ Sen^2\alpha\ Sen^2\alpha$$

$$3-4\ Cos2\ \alpha + Cos\ 4\alpha = 8\ Sen^4\alpha$$ L.Q.Q.D.

5. Demostrar que $Sen\ (3\propto) = 3Sen\propto - 4Sen^3\propto$

Sabiendo que $Cos2\ \alpha = Cos^2\alpha - Sen^2\alpha = 1-2Sen^2\alpha$ y $Sen\ 2\alpha = 2Sen\alpha\ Cos\alpha$ se tiene:

$Sen\ 3\alpha = Sen\ (2\alpha+\alpha) = Sen2\ \alpha\ Cos\alpha + Cos2\alpha\ Sen\alpha$

$= 2\ \text{Sen}\alpha\ Cos\alpha Cos\ \alpha + (1-2\text{Sen}\ ^2\alpha)\ \text{Sen}\alpha$

$= 2\ \text{Sen}\alpha\ \text{Cos}^2\alpha + (1-2\text{Sen}\ ^2\alpha)\ \text{Sen}\alpha$

$= 2\ \text{Sen}\alpha\ (1-\text{Sen}\ ^2\alpha) + (1-2\text{Sen}\ 2\alpha)\ \text{Sen}\alpha$

$= 2\ \text{Sen}\alpha - 2\text{Sen}\ ^3\alpha + \text{Sen}\alpha - 2\text{Sen}^3\alpha$

$Sen\ (3\alpha) = 3Sen\alpha - 4Sen^3\alpha$ L.Q.Q.D.

6. Demostrar que $Cos(3\alpha) = 4Cos^3\alpha - 3Cos\alpha$

De $Cos2\ \alpha = Cos^2\alpha - Sen^2\alpha = 2Cos^2\ \alpha - 1$ y $Sen\ 2\ \alpha\ = 2Sen\alpha\ \ Cos\ \alpha$ se tiene:

$Cos(3\alpha) = Cos(\alpha + 2\alpha) = Cos\ \alpha\ Cos2\ \alpha - Sen\ \alpha\ Sen2\ \alpha$

$= Cos\alpha\ (2\text{Cos}^2\alpha - 1) - Sen\ \alpha(2Sen\propto Cos\alpha)$

$= 2Cos^3\alpha - Cos\alpha - 2Sen^2\alpha\ Cos\alpha$

$= 2Cos^3\alpha - Cos\alpha - 2(1-Cos^2\alpha\ )\ Cos\alpha$

$= 2Cos^3\alpha - Cos\alpha - 2Cos\alpha + 2Cos^3\alpha$

$Cos(3\alpha) = 4Cos^3\alpha - 3Cos\alpha$ L.Q.Q.D.

7. Demostrar que $Cos(5\alpha) = 16Cos^5\alpha - 20Cos^3\alpha + 5Cos\alpha$

Sabiendo que $Cos2\ \alpha = Cos^2\alpha - Sen^2\alpha = 2Cos^2\alpha - 1,\qquad Sen\ 2\ \alpha = 2Sen\alpha\ Cos\alpha$

$Sen\ (3\alpha) = 3Sen\alpha - 4Sen^3\alpha\ Cos(3\alpha) = 4Cos^3\alpha - 3Cos\alpha$, se tiene:

$Cos(5\alpha) = Cos(2\alpha + 3\alpha) = Cos2\alpha\ Cos3\alpha - Sen2\alpha\ Sen3\alpha$

$= (2Cos^2\ \alpha - 1)(4Cos^3\ \alpha - 3Cos\ \alpha\ ) - (2Sen\ \alpha\ Cos\ \alpha\ )(3Sen\ \alpha - 4Sen^3\alpha\ )$

$= 8Cos^5\alpha - 6Cos^3\alpha - 4Cos^3\alpha + 3Cos\ \alpha - 6Sen^2\ \alpha\ Cos\ \alpha + 8Sen^4\ \alpha\ Cos\ \alpha$

$$= 8Cos^5\alpha - 6Cos^3\alpha - 4Cos^3\alpha + 3Cos\alpha - 6(1 - Cos^2\alpha)\,Cos\,\alpha + 8(1 - Cos^2\alpha)^2\,Cos\,\alpha$$

$$= 8Cos^5\alpha - 6Cos^3\alpha - 4Cos^3\alpha + 3Cos\alpha - 6Cos\alpha + 6Cos^3\alpha + 8(1 - 2Cos^2\alpha + Cos^4\alpha)\,Cos\,\alpha$$

$$= 8Cos^5\alpha - 4Cos^3\alpha - 3Cos\,\alpha + 8Cos\,\alpha - 16Cos^3\alpha + 8Cos^5\alpha$$

$$= 16Cos^5\alpha - 20Cos^3\alpha + 5Cos\alpha$$

$Cos(5\alpha) = 16Cos^5\alpha - 20Cos^3\alpha + 5Cos\alpha$ L.Q.Q.D.

8. Demostrar que $\dfrac{Sen\,5\alpha + Sen\,2\alpha}{Cos\,5\alpha + Cos\,2\alpha} = Tag\left(\dfrac{7x}{2}\right)$

Sabiendo que $Sen\ \alpha + Sen\ \beta = 2\ Sen\ \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \mathrm{Cos}\,\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$

y $Cos\ \alpha + Cos\ \beta = 2\ Cos\ \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \mathrm{Cos}\,\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$, se tiene:

$$\frac{Sen\,5\alpha + Sen\,2\alpha}{Cos\,5\alpha + Cos\,2\alpha} = \frac{2Sen\dfrac{1}{2}(5x+2x)Cos\dfrac{1}{2}(5x-2x)}{2Cos\dfrac{1}{2}(5x+2x)Cos\dfrac{1}{2}(5x-2x)} = \frac{Sen\dfrac{1}{2}(7x)Cos\dfrac{1}{2}(3x)}{Cos\dfrac{1}{2}(7x)Cos\dfrac{1}{2}(3x)}$$

$\dfrac{Sen\,5\alpha + Sen\,2\alpha}{Cos\,5\alpha + Cos\,2\alpha} = Tag\left(\dfrac{7x}{2}\right)$ L.Q.Q.D.

9. Demostrar que $Tag(3x) = \dfrac{3Tagx - Tag^3x}{1 - 3\,Tag^2x}$

Sabiendo que $Tag(2x) = \dfrac{2Tagx}{1 - Tag^2x}$, se tiene:

$$Tag(3x) = Tag(x+2x) = \frac{Tagx + Tag2x}{1 - Tagx\,Tag2x} = \frac{Tagx + \dfrac{2Tagx}{1 - Tag^2x}}{1 - \dfrac{2\,TagxTagx}{1 - Tag^2x}}$$

$$= \frac{\dfrac{Tagx - Tag^3x + 2Tagx}{1 - Tag^2x}}{\dfrac{1 - Tag^2x - 2\,Tag^2x}{1 - Tag^2x}}$$

$$= \frac{3\,Tagx - Tag^3x}{1 - 3\,Tag^2x}$$

$$Tag(3x) = \frac{3Tagx - Tag^3x}{1 - 3\,Tag^2x}$$

10. Demostrar que $Tag(5x) = \dfrac{Tag^5x - 10\,Tag^3x + 5\,Tag}{1 - 10\,Tag^2x + 5\,Tag^4x}$

Sabiendo que $Tag(3x) = \dfrac{3Tagx - Tag^3x}{1 - 3\,Tag^2x}$ y $Tag(2x) = \dfrac{2Tagx}{1 - Tag^2x}$ se tiene:

$$Tag(5x) = Tag(2x + 3x) = \frac{Tag(2x) + Tag(3x)}{1 - Tag(2x)Tag(3x)} = \frac{\dfrac{2Tagx}{1 - Tag^2x} + \dfrac{3Tagx - Tag^3x}{1 - 3\,Tag^2x}}{1 - \dfrac{2Tagx}{1 - Tag^2x}\,\dfrac{3Tagx - Tag^3x}{1 - 3\,Tag^2x}}$$

$$= \frac{\dfrac{2Tagx\left(1 - 3\,Tag^2x\right) + \left(1 - Tag^2x\right)\left(3Tagx - Tag^3x\right)}{\left(1 - Tag^2x\right)\left(1 - 3\,Tag^2x\right)}}{\dfrac{\left(1 - Tag^2x\right)\left(1 - 3\,Tag^2x\right) - 2Tagx\left(3Tagx - Tag^3x\right)}{\left(1 - Tag^2x\right)\left(1 - 3\,Tag^2x\right)}}$$

$$= \frac{2Tagx\left(1 - 3\,Tag^2x\right) + \left(1 - Tag^2x\right)\left(3Tagx - Tag^3x\right)}{\left(1 - Tag^2x\right)\left(1 - 3\,Tag^2x\right) - 2Tagx\left(3Tagx - Tag^3x\right)}$$

$$= \frac{2Tagx - 6\,Tag^3x + 3Tagx - Tag^3x - 3Tag^3x + Tag^5x}{1 - 3\,Tag^2x - Tag^2x + 3Tag^4x - 6Tag^2x + 2Tag^4x}$$

$$= \frac{Tag^5x - 10\,Tag^3x + 5Tagx}{1 - 10Tag^2x + 5Tag^4x}$$

L.Q.Q.D.

7.7. Signos de funciones trigonométricas

En un sistema de coordenadas rectangulares, se dice que un ángulo está en posición estándar, si el vértice coincide con el origen y lado inicial I_1 coincide con el eje x positivo.

Si I_1 hacemos girar en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj, hasta la posición terminal I_2 , el ángulo se considera positivo.

Si I_1 gira en dirección de las manecillas de un reloj, el ángulo se considera negativo (ver figuras 7.34).

a) Ángulo positivo b) Ángulo negativo c) Ángulo positivo

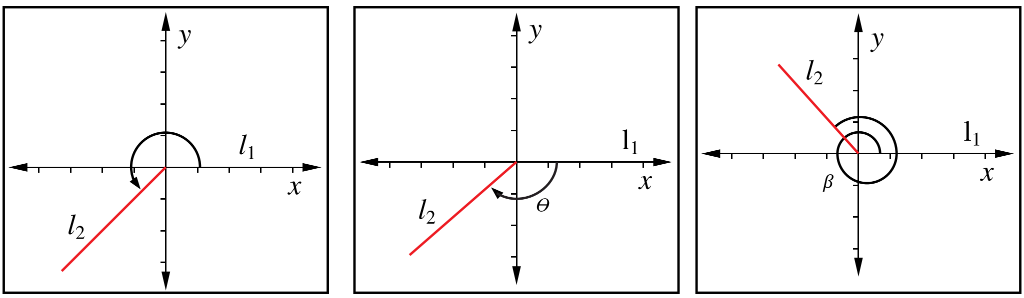


Figura 7. 34. Representaciones de ángulos positivos y negativos

Se dice que un ángulo es cuadrantal si su lado terminal está en un eje coordenado (ver figuras 7.35).

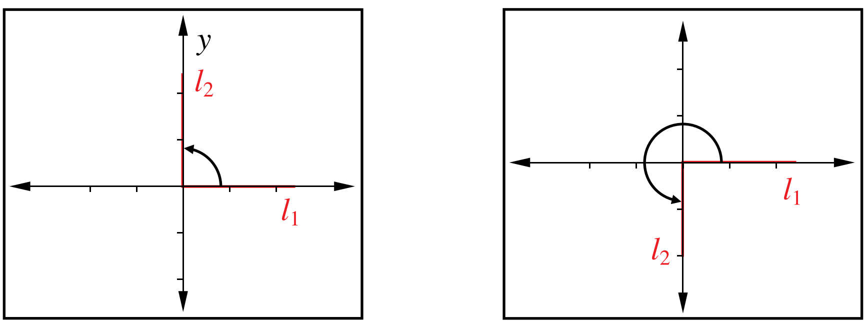


Figura 7. 35. Representaciones de ángulos cuadrantales

Si θ es un ángulo no cuadrantal en posición estándar, el ángulo de referencia para θ es el ángulo agudo θ_r que el lado terminal de θ forma con el eje x.

Si θ es un ángulo en el primer cuadrante, el ángulo de referencia es $\theta_r = \theta$. Si θ es un ángulo en el segundo cuadrante, el ángulo de referencia es $\theta_r = \pi - \theta$, ver figuras 7.36.

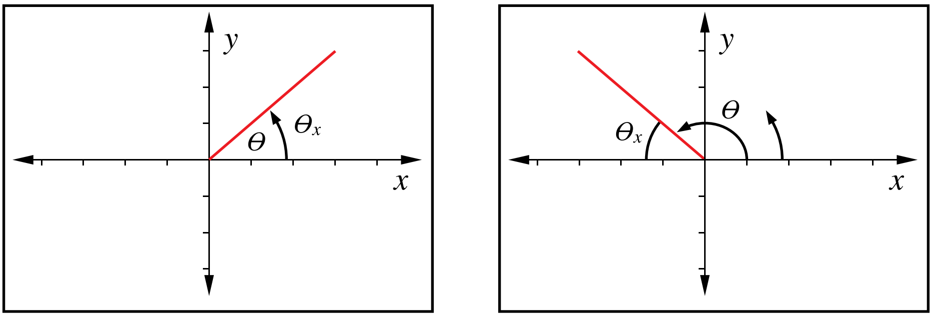


Figura 7. 36. Representaciones de los ángulos de referencia en el primero y segundo cuadrante

Si θ es un ángulo en el tercer cuadrante, el ángulo de referencia es $\theta_r = \pi - \theta$. Y si θ es un ángulo en el cuarto cuadrante, el ángulo de referencia es $\theta_r = 2\pi - \theta$, (ver figuras 7.37).

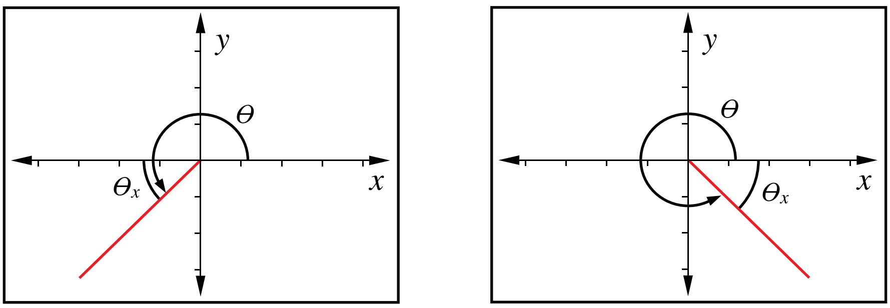


Figura 7. 37. Representaciones de los ángulos de referencia en el tercero y cuarto cuadrante

Teorema: sea θ un ángulo no cuadrantal en posición estándar, entonces para hallar el valor de una función trigonométrica en θ, se determina su valor para el ángulo de referencia θ_r y se antepone el signo apropiado.

Para determinar los signos de los valores de las funciones trigonométricas, supongamos que θ está en el segundo cuadrante y $P(x, y)$ es un punto en el lado terminal (ver figura 5.38). Entonces x es negativa e y positiva, esto implica que la función seno y la cosecante son positivas y las demás negativas.

De igual forma, si θ está en el cuarto cuadrante y $P(x, y)$ es un punto en el lado terminal, entonces x es positiva e y negativa. Esto implica que la función coseno y la secante son positivas y las demás negativas.

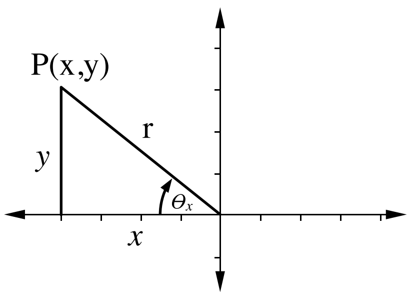


Figura 7.38. Punto y ángulo en el segundo cuadrante

Con un procedimiento análogo se pueden determinar los signos de las funciones trigonométricas en los demás cuadrantes.

A continuación, se resumen los signos de las funciones trigonométricas en cada uno de los cuadrantes.

En el primer cuadrante, todas las funciones trigonométricas son positivas.

En el segundo cuadrante, seno y cosecante son positivas y las demás funciones trigonométricas son negativas.

En el tercer cuadrante, son positivas la tangente y cotangente, las demás son negativas.

En el cuarto cuadrante, son positivos el coseno y la secante, las demás son negativas.

Ejemplos

Usar los ángulos de referencia para hallar los valores exactos de *Sen* θ, *Cos* θ y *Tag* θ *si* $\theta = \frac{5}{6}\pi$, $\theta = \frac{7}{4}\pi$ y $\theta = \frac{4}{3}\pi$

Para solucionar el problema y hallar los valores exactos de los ángulos básicos 30º, 45º y 60º nos apoyaremos en los triángulos de la figura 7.39. Por ejemplo, si queremos el valor exacto del coseno de 45º, a partir del triángulo rectángulo isósceles y utilizando la definición, obtenemos $\text{Cos}\left(45^{\circ}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; si queremos el valor exacto de la cosecante de 60º, a partir de triángulo equilátero y la definición, obtenemos $Csc\left(60^{\circ}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

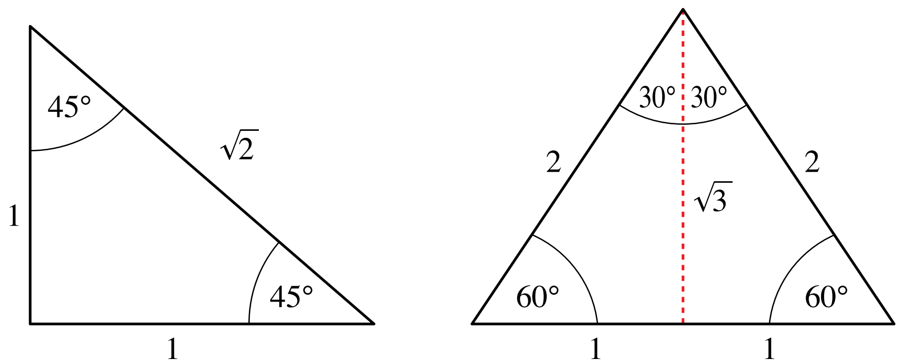
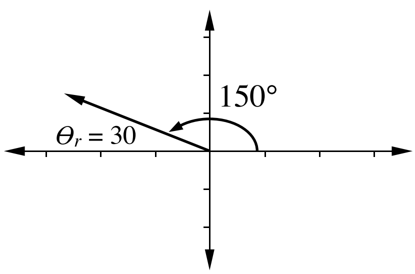


Figura 7.39. Representación de un triángulo rectángulo, isósceles y equilátero respectivamente

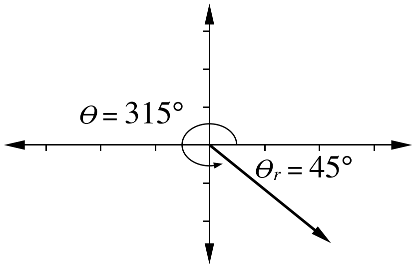


$$Sen\left(\frac{5}{6}\pi\right)=Sen\,(150^{0})=Sen\,(30^{0})=\frac{1}{2}$$

$$Cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)=Cos\,(150^{0})=-\,Cos\,(30^{0})=-\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Tag\left(\frac{5}{6}\pi\right)=tg\,(150^{0})=-\,tg\,(30^{0})=-\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Figura 7.40. Ángulo referencial en el segundo cuadrante

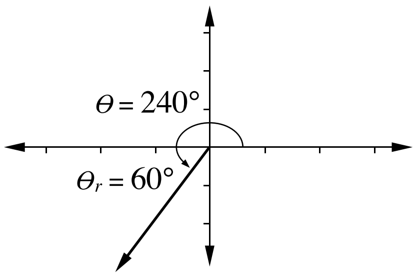


$$Sen\left(\frac{7}{4}\pi\right) = Sen\,(315^0) = -\,Sen\,(45^0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = Cos\,(315^0) = Cos\,(45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Tag\left(\frac{7}{4}\pi\right) = tg\,(315^0) = -\,tg\,(45^0) = -1$$

Figura 7.41. Ángulo referencial en el cuarto cuadrante



$$Sen\left(\frac{4}{3}\pi\right) = Sen\,(240^0) = -\,Sen\,(60^0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = Cos\,(240^0) = -\,Cos\,(60^0) = -\frac{1}{2}$$

$$Tag\left(\frac{4}{3}\pi\right) = tg\,(240^0) = tg\,(60^0) = \sqrt{3}$$

Figura 7.42. Ángulo referencial en el tercer cuadrante

7.8. Aplicaciones de las identidades trigonométricas

En la resolución de los ejercicios, veremos la aplicación de las identidades trigonométricas para solucionar los problemas.

1. Utilizando el valor de los ángulos básicos, hallar el ***Sen 15º***.

$Sen\,15º = \text{Sen}\,(45º–30º) = Sen\,45\,º\;Cos\,30\,º - \text{Cos}\,45\,º\;\text{Sen}\,30\,º$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2. Demostrar que $Cos\,(\alpha - 315^{o}) = \dfrac{Cos\,\alpha - Sen\,\alpha}{\sqrt{2}}$

$$Cos\,(\alpha - 315^{o}) = Cos\,\alpha\, Cos\, 315^{o} + \text{Sen}\,\alpha\,\text{Sen}\,315^{o}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} Cos\,\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{Sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(Cos\,\alpha - \text{Sen}\,\alpha)$$

3. Demostrar que $Sen\,(60^{o} + \alpha) - Sen\alpha = \text{Sen}\,(60^{o} - \alpha)$

$$Sen\,(60^{o} + \alpha) - Sen\,\alpha = \text{Sen}\,60^{o} Cos\,\alpha + \text{Sen}\,\alpha\, Cos\,60^{o} - \text{Sen}\,\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\text{Cos}\,\alpha + \frac{1}{2}\text{Sen}\,\alpha - \text{Sen}\,\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\text{Cos}\,\alpha - \frac{1}{2}\text{Sen}\,\alpha$$

$$= Sen\,60^{o} Cos\alpha - Cos\,60^{o}\,Sen\,\alpha = Sen(60^{o} - \alpha)$$

4. Demostrar que $Tag\,(45^{o} + \alpha) = \dfrac{1 + Tag\,\alpha}{1 - Tag\,\alpha}$

$$Tag\,(45^{o} + \alpha) = \frac{Tag 45^{o} + Tag\,\alpha}{1 - Tag 45^{o}\,Tag\,\alpha} = \frac{1 + Tag\,\alpha}{1 - Tag\,\alpha}$$

5. Demostrar que $Ctg\;(60^{o} + \alpha) = \dfrac{1 - \sqrt{3}Tag\,\alpha}{Tag\,\alpha + \sqrt{3}}$

$$Ctg\;(60^{o} + \alpha) = \frac{Ctg\,60^{o} Ctg\,\alpha - 1}{Ctg\,60^{o} + Ctg\,\alpha} = \frac{\frac{1}{Tag\,60^{o}}\frac{1}{Tag\,\alpha} - 1}{\frac{1}{Tag\,60^{o}} + \frac{1}{Tag\,\alpha}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{Tag\,\alpha} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{Tag\,\alpha}} = \frac{\frac{1 - \sqrt{3}Tag\,\alpha}{\sqrt{3}Tag\,\alpha}}{\frac{Tag\,\alpha + \sqrt{3}}{\sqrt{3}Tag\,\alpha}}$$

$$Ctg\;(60^{o} + \alpha) = \frac{1 - \sqrt{3}Tag\,\alpha}{Tag\,\alpha + \sqrt{3}}$$

6. Dado $Sen\ x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ cuando está en el segundo cuadrante (ver figura 7.43).

Halle $Sen\ 2x$, $Cos\ 2x$ y $Tag\ 2x$

$$Sen\ 2x == 2\ Sen\ x\ Cos\ x\ = 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$Cos\ 2x\ =\ Cos^2 x - Sen^2 x = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 == \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{4}$$

$$Tag\ 2x == \frac{2\,Tag\ x}{1 - Tag^2 x} = \frac{2(-2)}{1-(-2)^2} = \frac{4}{3}$$

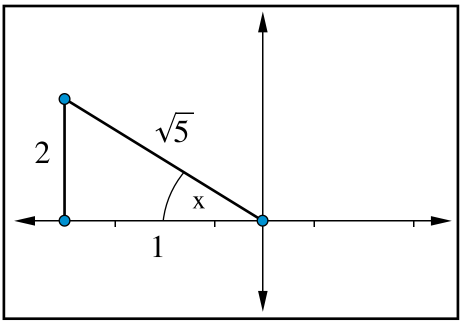


Figura 7.43. Triángulo con ángulo x en el segundo cuadrante

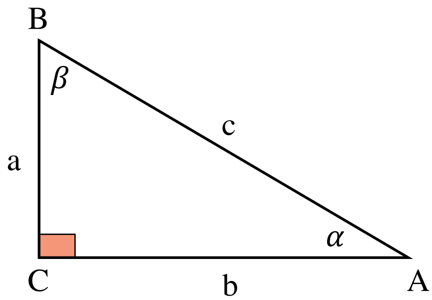


Figura 7.44. Triángulo ABC

7. Dado el triángulo ABC representado en la figura 7.44, demostrar que:

a) $Sen\ (2\alpha) = Sen\ (2\beta)$

$Sen\ (2\alpha) = Sen\ (2(90 - \beta)) = Sen\ (180 - 2\beta) =$

$= Sen 180^\circ\ Cos 2\beta - Cos 180^\circ\ Sen 2\beta$

$= (0)\ Cos 2\beta - (-1)\ Sen 2\beta$

$Sen\ (2\alpha) = Sen\ (2\beta)$

b) $Cos\ (2\alpha) = \dfrac{b^2 - a^2}{c^2}$

$$Cos\ (2\alpha) = Cos^2\alpha - Sen^2\alpha = \left(\frac{b}{c}\right)^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2} - \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2 - a^2}{c^2}$$

c) $Tag(2\alpha) = \dfrac{2\,a\,b}{b^2 - a^2}$

$$Tag\ (2\alpha) = \frac{2\ Tag\ \alpha}{1 - Tag^2\ \alpha} = \frac{2\left(\dfrac{a}{b}\right)}{1 - \left(\dfrac{a}{b}\right)^2} = \frac{\dfrac{2\,a}{b}}{\dfrac{b^2 - a^2}{b^2}} = \frac{2ab}{b^2 - a^2}$$

8. Si α termina en el tercer cuadrante (ver figura 7.45) y $Ctg\ \alpha_r = \dfrac{4}{3}$

Hallar el valor de $Sen\dfrac{\alpha}{2}$, $Cos\dfrac{\alpha}{2}$, $Tag\dfrac{\alpha}{2}$ y $Cos2\alpha - Tag\dfrac{\alpha}{2}$

$$Sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \text{Cos}\ \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\dfrac{4}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\dfrac{9}{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$Cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \text{Cos}\ \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + \left(-\dfrac{3}{5}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{\dfrac{2}{5}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$Tag\frac{\alpha}{2} = \frac{Sen\dfrac{\alpha}{2}}{Cos\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}{-\dfrac{1}{\sqrt{5}}} = -\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$Cos2\alpha - Tag\frac{\alpha}{2} = Cos^2\alpha - Sen^2\alpha - Tag\frac{\alpha}{2} = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{25} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

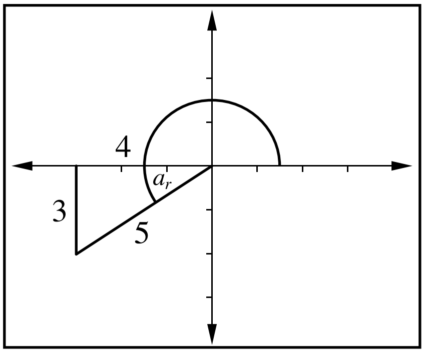


Figura 7.45. Triángulo con ángulo en el tercer cuadrante

EJERCICIOS PROPUESTOS 7.3

1. Si θ es un ángulo en posición estándar y $P(-11, 20)$ está en el lado terminal de θ, halle los valores de las funciones trigonométricas de θ.

2. Si α es un ángulo en posición estándar y $P(-10, -7)$ está en el lado terminal de α, halle los valores de las funciones trigonométricas de α.

3. Si β es un ángulo en posición estándar y $P(8, -15)$ está en el lado terminal de β, halle los valores de las funciones trigonométricas de β.

4. $\mathrm{Cos}\,\theta = -\frac{3}{5}$ y $Sen\,\theta > 0$ halle los valores de las funciones trigonométricas.

5. Si $\mathrm{Sec}\,\theta = -\frac{\sqrt{58}}{7}$ y $\mathrm{Tag}\,\theta > 0$, halle los valores de las funciones trigonométricas.

6. Si $\mathrm{Ctg}\,\theta = \frac{6}{11}$ y $Cos\,\theta > 0$, halle los valores de las funciones trigonométricas.

7. Si $\mathrm{Tag}\,\theta = \frac{3}{7}$ y $Ctg\,\theta > 0$, halle los valores de las funciones trigonométricas.

8. Considere el triángulo de vértices $A(0, 0)$; $B(1, 0)$ y $C(1, \sqrt{3})$ y halle las funciones trigonométricas de los ángulos agudos.

9. Del triángulo de vértices $A(1,\ 1)$; $B(4,\ 1)$ y $C(4,4)$, halle las funciones trigonométricas de los dos ángulos agudos.

10. Del triángulo *PNM* (ver figura 5.46), halle los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de los vértices *M* y *N*.

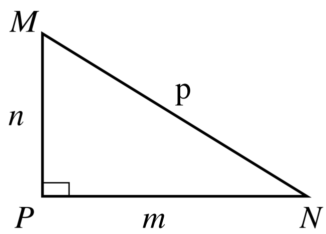


Figura 7.46. Triángulo PNM

7.9. Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica no es una identidad, para hallar su solución aplicaremos técnicas semejantes a las usadas en las ecuaciones algebraicas. Para resolver una ecuación trigonométrica, debe expresarse en función solo de senos, cosenos o tangentes para hallar los valores de los ángulos que satisfagan la ecuación. Las soluciones de una ecuación trigonométrica pueden expresarse en radianes o grados según sea el caso.

Ejemplos.

1. Hallar todas las soluciones de la ecuación $Cos\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dado que $Cos\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ \alpha = Cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = 30^{\circ}$, el ángulo de referencia para α es $\alpha_r = \frac{\pi}{6}$. Dado que α es un ángulo en posición estándar, y sabiendo que $Cos\ \alpha > 0$, el lado terminal está en el primer y cuarto cuadrante (ver figura 5.47), por lo tanto, hay dos soluciones para $0 \leq \alpha \leq\ 2\pi$: $\alpha = \frac{\pi}{6}$ y $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

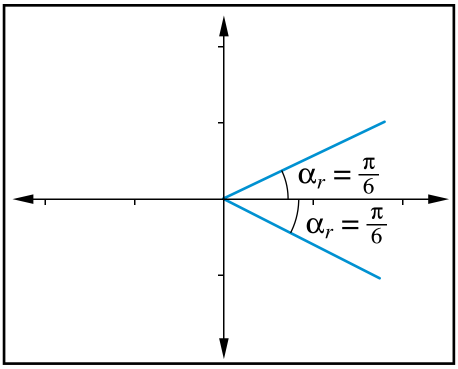


Figura 7.47. Ángulo en el primero y cuarto cuadrante

Sabiendo que la función coseno tiene período 2π, todas las soluciones se pueden hallar sumando $2\pi\, k,\ \ k \in Z$ a $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{11\pi}{6}$ es decir:

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi\, k,\ \ k \in Z \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{11\pi}{6} + 2\pi\, k,\ \ k \in Z$$

2. Hallar todas las soluciones de la ecuación $Sen\, \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Como $Sen\, \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = Sen^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} = -60^\circ$, es un ángulo negativo este se mide en sentido horario; el ángulo de referencia para α es $\alpha_r = \frac{\pi}{3}$

Dado que α es un ángulo en posición estándar, y sabiendo que Sen $\alpha < 0$, el lado terminal está en el tercer y cuarto cuadrante (ver figura 7.48), por lo tanto, hay dos soluciones para $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \quad \text{y} \quad \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

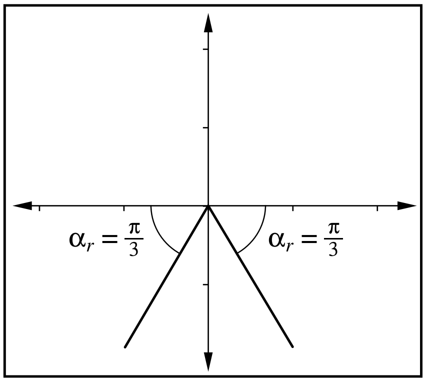


Figura 7.48. Ángulo en el tercero y cuarto cuadrante

Sabiendo que la función seno tiene período 2π, todas las soluciones se pueden hallar sumando $2\pi\, k,\ \ k \in Z$ a $\frac{4\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$, es decir:

$$\alpha = \frac{4\pi}{3} + 2\pi\, k,\ \ k \in Z \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{5\pi}{3} + 2\pi\, k,\ \ k \in Z$$

3. Hallar todas las soluciones de la ecuación $Ctg\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$Ctg\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{Tag}\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \mathrm{Tag}\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = Tag^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = arctag\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ el ángulo de referencia para α es $\alpha_r = \frac{\pi}{3}$.

Dado que α es un ángulo en posición estándar, y sabiendo que $Tag\ \alpha > 0$, el lado terminal está en el primer y tercer cuadrante (ver figura 7.49), por lo tanto, hay dos soluciones para $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

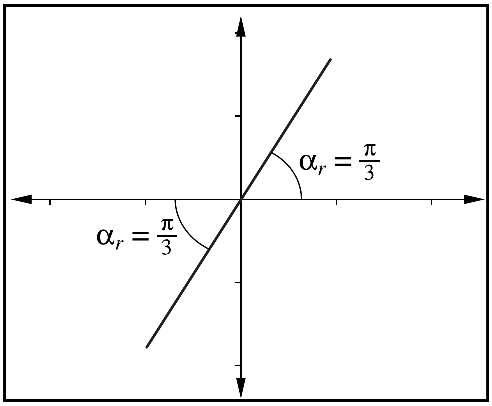


Figura 7.49. Ángulo en el primero y tercer cuadrante

Sabiendo que la función tangente tiene periodo π, todas las soluciones se pueden hallar sumando $\pi k,\ k \in Z$ a $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$, es decir:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ \ k \in Z \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{4\pi}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$$

4. Hallar todas las soluciones de la ecuación $Cos\left(5\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como $Cos\left(5\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 5\alpha + \frac{\pi}{3} = Cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = 45°$, entonces $5\alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{60}$, el ángulo de referencia para α es $\alpha_r = \frac{\pi}{4}$.

Dado que α un ángulo en posición estándar, y sabiendo que $Cos\,\alpha > 0$, el lado terminal está en el primer y cuarto cuadrante (ver figura 7.50), por lo tanto, hay dos soluciones para $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

$$5\alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{60}$$

$$5\alpha + \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5}\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{17\pi}{60}$$

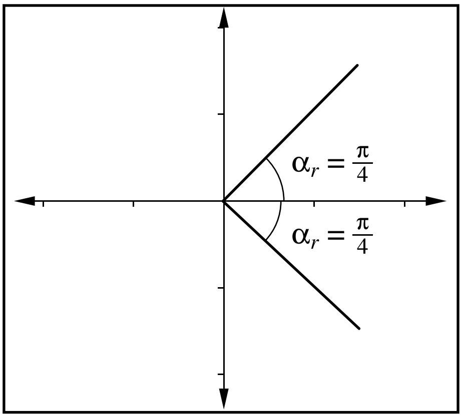


Figura 7.50. Ángulo en el primero y cuarto cuadrante

Sabiendo que la función coseno tiene período 2π , todas las soluciones se pueden hallar sumando $2\pi k,\ k \in Z$ a $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$, es decir:

$$5\alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{60} + \frac{2\pi k}{5},\quad k \in Z$$

$$5\alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow \alpha = \frac{17\pi}{60} + \frac{2\pi k}{5},\quad k \in Z$$

5. Hallar todas las soluciones de la ecuación $Cos\ \alpha\ Tag\ \alpha + 3Cos\ \alpha - Tag\ \alpha - 3 = 0$

$$Cos\ \alpha\ Tag\ \alpha + 3Cos\ \alpha - Tag\ \alpha - 3 = 0$$

$$(Cos\ \alpha\ Tag\ \alpha + 3Cos\ \alpha) - (Tag\ \alpha + 3) = 0$$

$$Cos\ \alpha\ (Tag\ \alpha + 3) - (Tag\ \alpha + 3) = 0$$

$$(Tag\ \alpha + 3)(Cos\ \alpha - 1) = 0$$

$$Tag\ \alpha + 3 = 0\quad Cos\ \alpha - 1 = 0$$

a) $Tag\ \alpha + 3 = 0 \Rightarrow \text{Tag}\ \alpha = -3 \Rightarrow \alpha = Tag^{-1}(-3) \Rightarrow \alpha = -71.57\ ^{o}$, el ángulo de referencia para α *es* $\alpha_r = 71.57^{o}$. Dado que α es un ángulo en posición estándar, y sabiendo que $Tag\ \alpha > 0$ el lado terminal está en el segundo y cuarto cuadrante (ver figura 7.51), por lo tanto, hay dos soluciones para $0 \leq \alpha \leq 2\pi$:

$$\alpha = 180^{o} - 71.57^{o} = 108.43^{o}$$

$$\alpha = 360^{o} - 71.57^{o} = 288.43^{o}$$

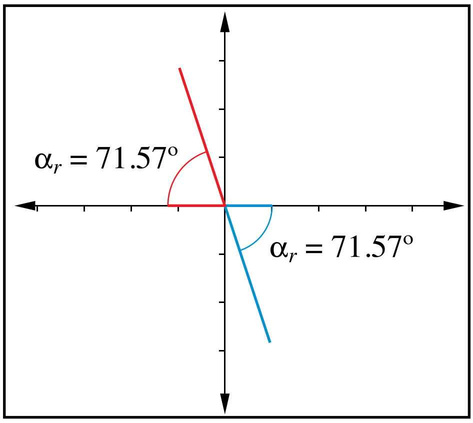


Figura 7.51. Ángulo en el segundo y cuarto cuadrante

Sabiendo que la función tangente tiene período π , todas las soluciones se pueden hallar sumando $180^{o}\ k, k \in Z$ a 108.43^{o} y 288.43^{o} ; es decir:

$$\alpha = 108{,}43^{o} + 180^{o}\ k, \quad k \in Z \text{ y}$$

$$\alpha = 288{,}43^{o} + 180^{o}\ k, \quad k \in Z$$

b) $Cos\ \alpha - 1 = 0 \Rightarrow Cos\ \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = Cos^{-1}(1) \Rightarrow \alpha\ = 0^{o}$, el ángulo de referencia para α es $\alpha_r = 0^{o}$. En este caso, hay dos soluciones $\alpha = 0^{o}$ y $\alpha = 360^{o}$ entre $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ (ver figura 7.52). Entonces todas las soluciones se pueden hallar sumando $360^{o}\ k, \quad k \in Z$ a 0^{o}, es decir: $\alpha = 360^{o}\ \ k, \quad k \in Z.$

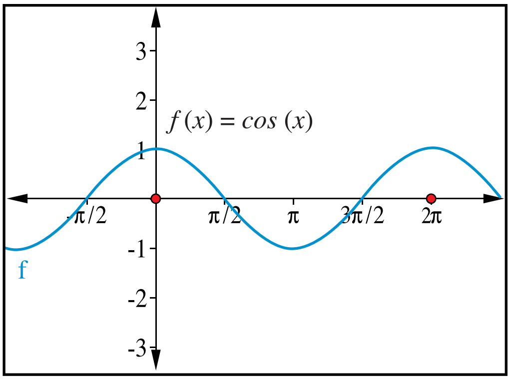


Figura 7.52. Gráfico de función coseno

Por lo tanto, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación está dado por:

$$\begin{cases} \alpha = 108.43^\circ + 180^\circ k \\ \alpha = 288.43^\circ + 180^\circ k, \quad k \in Z \\ \alpha = 360^\circ k \end{cases}$$

6. Resolver la ecuación $8Cos^2\alpha\, Sen\,\alpha - 6Sen\,\alpha - 4Cos^2\alpha + 3 = 0$

$$8Cos^2\alpha\, Sen\,\alpha - 6Sen\,\alpha - 4Cos^2\alpha + 3 = 0$$

$$(8Cos^2\alpha\, Sen\,\alpha - 6Sen\,\alpha) - (4Cos^2\alpha - 3) = 0$$

$$2Sen\,\alpha\,(4Cos^2\alpha - 3) - (4Cos^2\alpha - 3) = 0$$

$$(4Cos^2\alpha - 3)(2Sen\,\alpha - 1) = 0$$

a) $4Cos^2\alpha - 3 = 0 \Rightarrow Cos\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$, el análisis de esta ecuación lo haremos en dos partes:

a.1) $Cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = Cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$, el ángulo de referencia para α es $\alpha_r = \frac{\pi}{6}$. Dado que α es un ángulo en posición estándar, y sabiendo que Cos $\alpha > 0$, el lado terminal está en el primer y cuarto cuadrante (ver figura 7.53); por lo tanto, hay dos soluciones para $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

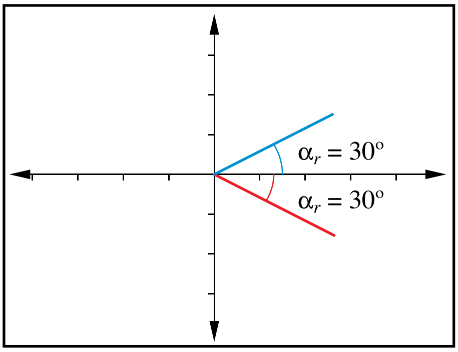


Figura 7.53. Ángulo en el primero y cuarto cuadrante

Sabiendo que la función coseno tiene período, todas las soluciones se pueden hallar sumando $2\pi k,\ k \in Z$ a $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{11\pi}{6}$, es decir:

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$$

a.2) $Cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = Cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}$. Este ángulo está en el segundo cuadrante y es una de las soluciones de la ecuación. El ángulo de referencia para α es $\alpha_r = \frac{\pi}{6}$. Dado que α es un ángulo en posición estándar, y sabiendo que $Cos\ \alpha < 0$, el lado terminal está en el segundo y tercer cuadrante (ver figura 7.54), por lo tanto, hay dos soluciones para $0 \le \alpha \le 2\pi$

$$\alpha = \frac{5\pi}{6} \quad \text{y} \quad \alpha = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

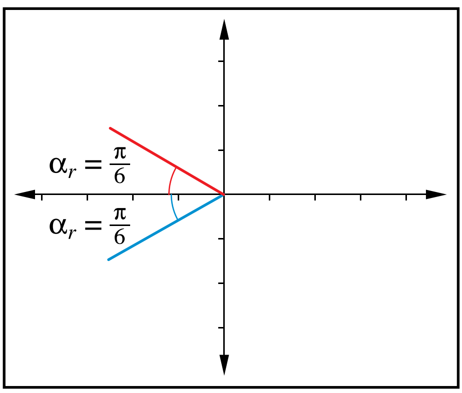


Figura 7.54. Ángulo en el segundo y tercer cuadrante

Sabiendo que la función coseno tiene período 2π , todas las soluciones se pueden hallar sumando $2\pi\, k,\ \ k\in Z$ a $\frac{5\pi}{6}$ y $\frac{7\pi}{6}$, es decir:

$$\alpha=\frac{5\pi}{6}+2\pi\, k,\ \ k\in Z \quad \text{y} \quad \alpha=\frac{7\pi}{6}+2\pi\, k,\ \ k\in Z$$

b) $2Sen\,\alpha-1=0 \Rightarrow\ Sen\,\alpha=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \alpha=Sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=arcsen\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$, el ángulo de referencia para α es $\alpha_r=\frac{\pi}{6}$. Dado que es un ángulo en posición estándar, y sabiendo que $Sen\,\alpha>0$, el lado terminal está en el primer y segundo cuadrante, (ver figura 7.55), por lo tanto, hay dos soluciones para $0\le\alpha\le 2\pi$.

$$\alpha=\frac{\pi}{6}\ \text{ y }\ \alpha=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

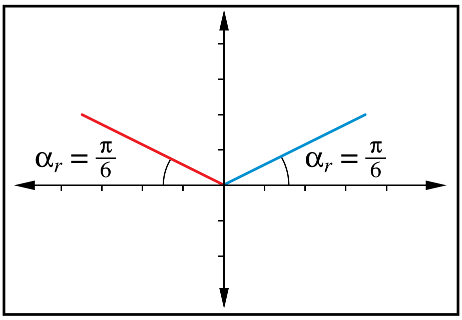


Figura 7.55. Ángulo en el primero y segundo cuadrante

Sabiendo que la función seno tiene período 2π, todas las soluciones se pueden hallar sumando $2\pi\, k,\ \ k\in Z$ a $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$, es decir:

$$\alpha=\frac{\pi}{6}+2\pi\, k,\ \ k\in Z \quad \text{y} \quad \alpha=\frac{5\pi}{6}+2\pi\, k,\ \ k\in Z$$

Por lo tanto, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación está dado por:

$$\begin{cases}\alpha=\frac{\pi}{6}+2\pi\, k, & \alpha=\frac{11\pi}{6}+2\pi\, k\\ \alpha=\frac{5\pi}{6}+2\pi\, k, & \alpha=\frac{7\pi}{6}+2\pi\, k\end{cases},\quad k\in Z$$

7. Hallar todas las soluciones de la ecuación $Sen\left(\frac{7\alpha}{2}\right)+Sen\left(\frac{17\alpha}{2}\right)=0$

$$Sen\left(\frac{7\alpha}{2}\right)+Sen\left(\frac{17\alpha}{2}\right)=0 \Rightarrow 2Sen\left(\frac{\frac{7\alpha}{2}+\frac{17\alpha}{2}}{2}\right)Cos\left(\frac{\frac{7\alpha}{2}-\frac{17\alpha}{2}}{2}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2Sen(6\alpha)Cos\left(-\frac{5\alpha}{2}\right)=0 \Rightarrow Cos\left(-\frac{5\alpha}{2}\right)=0 \vee Sen(6\alpha)=0$$

a) De $Cos\left(-\frac{5\alpha}{2}\right)=0 \Rightarrow Cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{5\alpha}{2}=Cos^{-1}(0) \Rightarrow \frac{5\alpha}{2}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{5}$, el otro ángulo donde el coseno es 0, es $\frac{3\pi}{2}$ (ver figura); entonces:

$$Cos\left(-\frac{5\alpha}{2}\right)=0 \Rightarrow Cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{5\alpha}{2}=Cos^{-1}(0) \Rightarrow \frac{5\alpha}{2}=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{3\pi}{5}$$

Sabiendo que la función coseno (ver figura 7.56), tiene período 2π, todas las soluciones se pueden hallar sumando:

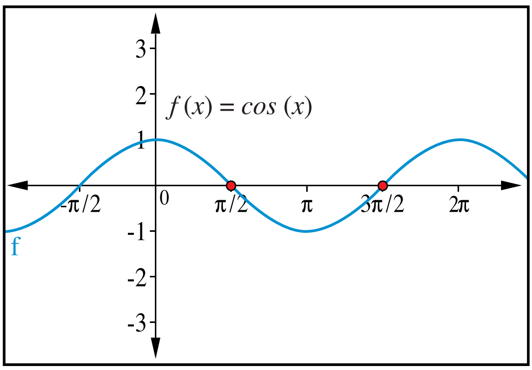


Figura 7.56. Gráfica de la función coseno

$$2\pi k, \ k \in Z \ \text{a} \ \frac{\pi}{2} \ \text{y} \ \frac{3\pi}{2}$$

Es decir:

$$\frac{5\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k, \ k \in Z \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi k}{5}, \ k \in Z$$

$$\frac{5\alpha}{2}=\frac{3\pi}{2}+2\pi k, \ k \in Z \Rightarrow \alpha=\frac{3\pi}{5}+\frac{4\pi k}{5}, \ k \in Z$$

b) De $Sen\,(6\alpha)=0$ $6\alpha = Sen^{-1}(0) \Rightarrow 6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, los otros ángulos donde el seno es 0, es π y 2π , entonces:

$$Sen(6\alpha)=0 \;\Rightarrow\; 6\alpha = Sen^{-1}(0) \Rightarrow \; 6\alpha = \pi \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$Sen(6\alpha)=0 \;\Rightarrow\; 6\alpha = Sen^{-1}(0) \Rightarrow \; 6\alpha = 2\pi \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Sabiendo que la función seno tiene período 2π, todas las soluciones se pueden hallar sumando $2\pi\,k,\;\; k \in Z$ a 0, π y 2π (ver figura 7.57), es decir:

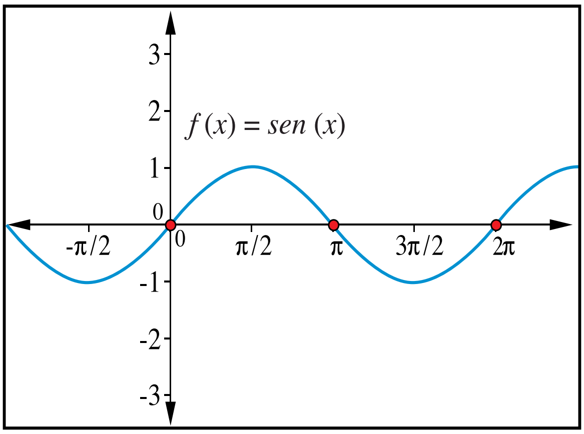


Figura 7.57. Gráfica de la función seno

$$6\alpha = 2\pi\,k,\;\; k \in Z \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{1}{3}\pi\,k,\;\; k \in Z$$

$$6\alpha = \pi + 2\pi\,k,\;\; k \in Z \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}\pi\,k,\;\; k \in Z$$

$$6\alpha = 2\pi + 2\pi\,k,\;\; k \in Z \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi\,k,\;\; k \in Z$$

Por lo tanto, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación está dado por

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{4\pi\, k}{5} \\ \alpha = \dfrac{3\pi}{5} + \dfrac{4\pi\, k}{5} \\ \alpha = \dfrac{1}{6}\pi + \dfrac{1}{3}\pi\, k \\ \alpha = \dfrac{1}{3}\pi + \dfrac{1}{3}\pi\, k \end{cases}, \qquad k \in Z$$

8. Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$Sen\left(\frac{1}{2}\alpha\right) + Sen\left(\frac{1}{3}\alpha\right) - Cos\left(\frac{1}{12}\alpha\right) = 0$$

Aplicando la identidad $Sen\ \alpha + Sen\ \beta = 2\ Sen\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \text{Cos}\frac{1}{2}\ (\alpha-\beta)$,

la ecuación nos queda:

$$2\ Sen\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\alpha\right)\ \text{Cos}\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\alpha\right) - Cos\left(\frac{1}{12}\alpha\ = 0\right)$$

$$2\ Sen\left(\frac{5}{12}\alpha\right)\ \text{Cos}\left(\frac{1}{12}\alpha\right) - Cos\left(\frac{1}{12}\alpha\right) = 0$$

$$\text{Cos}\left(\frac{1}{12}\alpha\right)\left[2\ Sen\left(\frac{5}{12}\alpha\right)\ -1\right] = 0$$

$$\text{Cos}\left(\frac{1}{12}\alpha\right) = 0 \quad \vee \quad 2\ Sen\left(\frac{5}{12}\alpha\right)\ -1 = 0$$

a) De $\text{Cos}\left(\frac{1}{12}\alpha\right) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{12}\alpha = Cos^{-1}(0) \Rightarrow\ \frac{1}{12}\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow\ \alpha = 6\pi$, el otro ángulo donde el coseno es 0, es $\frac{3\pi}{2}$ (ver figura 7.58); entonces:

$$\text{Cos}\left(\frac{1}{12}\alpha\right) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{12}\alpha = Cos^{-1}(0) \Rightarrow\ \frac{1}{12}\alpha = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow\ \alpha = 18\pi$$

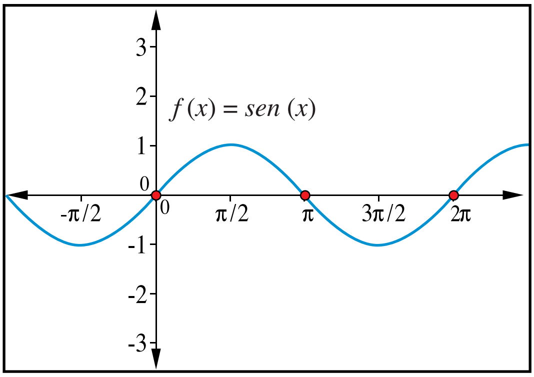


Figura 7.58. Gráfica de la función coseno

Sabiendo que la función coseno tiene período 2π, todas las soluciones se pueden hallar sumando $2\pi\, k,\ \ k \in Z$ a $\dfrac{\pi}{2}$ y $\dfrac{3\pi}{2}$; es decir:

$$\frac{1}{12}\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi\, k,\ k \in Z \Rightarrow \quad \alpha = 6\pi + 24\pi\, k,\ k \in Z$$

$$\frac{1}{12}\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi\, k,\ k \in Z \Rightarrow \quad \alpha = 18\pi + 24\pi\, k,\ k \in Z$$

b) $2\,Sen\left(\dfrac{5}{12}\alpha\right) - 1 = 0 \Rightarrow Sen\left(\dfrac{5}{12}\alpha\right) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{5}{12}\alpha = Sen^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{5}{12}\alpha = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{5}$

el ángulo de referencia para α es $\alpha_r = \dfrac{\pi}{6}$. Dado que es un ángulo en posición estándar, y sabiendo que $Sen > 0$, el lado terminal está en el primer y segundo cuadrante (ver figura 7.59); por lo tanto, hay dos soluciones para $0 \leq \alpha \leq 2\pi$:

$$\frac{5}{12}\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{5} \quad \text{y} \quad \frac{5}{12}\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{5}{12}\alpha = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \alpha = 2\pi$$

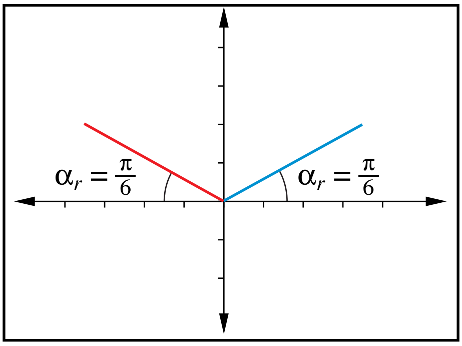


Figura 7.59. Cuadrantes donde la función seno es positiva

Sabiendo que la función seno tiene período 2π, todas las soluciones se pueden hallar sumando $2\pi k, \ k \in Z$ a $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$

Es decir:

$$\frac{5}{12}\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \ k \in Z \Rightarrow \ \alpha = \frac{2\pi}{5} + \frac{24}{5}\pi k, \ \ k \in Z$$

$$\frac{5}{12}\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ \ k \in Z \Rightarrow \ \alpha = 2\pi + \frac{24}{5}\pi k, \ \ k \in Z$$

Por lo tanto, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación está dado por:

$$\begin{cases} \alpha = 6\pi + 24\pi k, \\ \alpha = 18\pi + 24\pi k \\ \alpha = \frac{2\pi}{5} + \frac{24}{5}\pi k, & k \in Z \\ \alpha = 2\pi + \frac{24}{5}\pi k \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 7.3

Utilizando las fórmulas y la factorización apropiada, demostrar las siguientes identidades trigonométricas

1. $Cos(\pi - x) + Sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \frac{1}{Secx} = Cosx$

2. $Tag^2 x = \frac{1 - Cos2x}{1 + Cos2x}$

3. $Tag(\pi - x) + Ctg \quad \frac{\pi}{2} + x \quad (-) \quad Ctgx = 2$

4. $Sen\left(\frac{x}{2}\right)Cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}Senx$

5. $\frac{Sen(x+y) - Sen(x-y)}{Cosx} = 2Seny$

6. $\frac{Sen(x+y) - Sen(x-y)}{Cos(x+y) - Cos(x-y)} = -Ctgx$

7. $\frac{Cos2x - Sen2x + 2Sen^2 x}{Cosx - Senx} + Senx = Cosx$

8. $Secx - Tagx = \frac{1}{Secx + Tagx}$

9. $$\frac{6Tag^2x - Tag^4x - 1}{(1 - Tag^2x)Tagx} = 2(Tag2x - Ctg2x)$$

10. $$\frac{Cos^4x - Sen^4x}{Cosx - Senx} = \frac{1}{Secx} + \frac{1}{Cscx}$$

11. $$\frac{1 + \frac{1}{2}Sen\,2x}{Cos^3x - Sen^3x} = \frac{Secx\;Cscx}{Cscx - Secx}$$

12. $$Cosx + Cos2x + Cos3x = \frac{\text{Cos }2\text{x Sen}\left(\frac{3\text{x}}{2}\right)}{\text{Sen}\left(\frac{\text{x}}{2}\right)}$$

13. $$\frac{Cos^2x - 5Cosx - 6}{Cosx - 6} = \frac{1 + Secx}{Secx}$$

14. $$\frac{Tag^2x + 6\,Tagx\,Secx + 9Sec^2x}{Tagx + 3Secx} = \frac{Senx + 3}{Cosx}$$

15. $$Cos^4x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}Cos2x + \frac{1}{8}Cos4x$$

16. $$Sen^5x = \frac{5}{8}Senx - \frac{5}{16}Sen3x + \frac{1}{16}Sen5x$$

17. $$\frac{Cos^8 x - Sen^8 x}{Cos^4 x + Sen^4 x} = Cos2x$$

18. $$\frac{Cos3x - Cos5x}{Sen3x + Sen5x} = Tagx$$

19. $$\frac{2\,TagxSecx + 6\,Tagx - Secx - 3}{Secx + 3} = \frac{2Senx - Cosx}{Cosx}$$

20. $$Cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}Cos2x + \frac{1}{8}Cos4x$$

21. $$\frac{Sen\left(\frac{5}{2}x\right) + Sen\left(\frac{7}{2}x\right)}{Sen\left(\frac{5}{2}x\right) - Sen\left(\frac{7}{2}x\right)} = -Tag3xCtg\ \ \frac{1}{2}x$$

22. $$\frac{Cos\left(\frac{10}{3}x\right) + Cos\left(\frac{8}{3}x\right)}{Cos\left(\frac{10}{3}x\right) - Cos\left(\frac{8}{3}x\right)} = -\,Ctg3x\,Ctg\left(\frac{1}{3}x\right)$$

23. $$\frac{9\,Cos^2 x - 4\,Tag^2 x + 4\,Tagx - 1}{3Cosx - 2\,Tagx + 1} = \frac{3\,Cos^2 x + 2Senx - Cosx}{Cosx}$$

24. $$\frac{Cos^2 x - Sen^2 x + Cos^3 x - Sen^3 x}{Cosx - Senx} = Cosx + Senx + \frac{1}{2}Sen2x + 1$$

25. $Sec^4x + Tag^4x + Ctg^4x - 2Sec^2x\,Tag^2x - 2\,Tag^2x\,Ctg^2x + 2Sec^2x\,Ctg^2x = Csc^4x$

26. $$\frac{Cos^3x - Sen^3x + Cosx - Senx}{Senx - Cox} = -\frac{1}{2}Sen2x - 2$$

27. $Sen^4x + Cos^4x + Tag^4x + 2Sen^2x\,Cos^2x + 2Sen^2x\,Tag^2x + 2Cos^2x\,Tag^2x = Sec^4x$

28. $Cos^4x - Sen^4x + Sen^2x\,Cos^2x = Cos^2x$

29. $Cos^3x + Sen^3x + Sen^2x\,Cosx + Sen^2x\,Senx = 1 + Senx\,Cosx$

30. $Cos^4x\,Sen^{2n}x + 2Sen^{2n} + 2xCos^2x + Sen^{2n} + 4x = Sen^{2n}x$

Hallar: el conjunto de todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones trigonométricas

1. $Cos(\pi - x) + Sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + Sen2x = 1$

2. $\dfrac{1 - Cos2x}{1 + Cos2x} = 1$

3. $Tag(\pi - x) + Ctg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -2$

4. $Sen\left(\frac{x}{2}\right)Cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}$

5. $\frac{Sen(x+y) - Sen(x-y)}{Cosx} = \sqrt{3}$

6. $\frac{Sen(x+y) - Sen(x-y)}{Cos(x+y) - Cos(x-y)} = 4$

7. $Cos\left(\frac{5}{8}x\right) - Cos\left(\frac{19}{8}x\right) = \sqrt{3}Sen\left(\frac{3}{2}x\right)$

8. $\frac{Cos2x - Sen2x + 2Sen^2 x}{Cosx - Senx} = 1$

9. $Cos2x + Cosx = 0$

10. $sen\,5x + senx = \sqrt{2}\cos 2x$

11. $Sen\left(\frac{1}{2}x\right)+Sen\left(\frac{1}{3}x\right)-Sen\left(\frac{5}{12}x\right)=0$

12. $Cos2x+Cosx=0$

13. $Cos\left(\frac{5}{3}x\right)+Cos\left(\frac{1}{3}x\right)-\sqrt{2}Cosx=0$

14. $\frac{Cos3x-Cos5x}{Sen3x+Sen5x}=-10$

15. $Sen\left(\frac{3}{4}x\right)-Sen\,\mathrm{x}-\sqrt{3}Cos\left(\frac{7}{8}x\right)=0$

16. $\frac{Cos^2x-5Cosx-6}{Cosx-6}=0$

17. $\frac{1}{5}Cos3x+\frac{1}{5}Cos5x=\frac{\sqrt{3}}{5}Cosx$

18. $\frac{Cos^8x-Sen^8x}{Cos^4x+Sen^4x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. $$\frac{2\,TagxSecx + 6\,Tagx - Secx - 3}{Secx + 3} = 1$$

20. $$\frac{Tag^2x + 6\,Tagx\,Secx + 9Sec^2x}{Tagx + 3Secx} = 1$$

21. $$Cos^4x - Sen^4x + Sen2x\,Cos2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

22. $$\frac{9\,Cos^2x - 4\,Tag^2x + 4\,Tagx - 1}{3Cosx - 2\,Tagx + 1} = -1$$

23. $$\frac{Cos^3x - Sen^3x + Cosx - Senx}{Senx - Cox} = -\frac{5}{2}$$

24. $$\frac{3}{8} + \frac{1}{2}Cos2x + \frac{1}{8}Cos4x = \frac{1}{4}$$

25. $sen^2x\ (tgx + 1) = 3senx\ (cosx - senx) + 3$

26. $$\text{Sen}^3\text{x Cosx} - \text{Sen x Cos}^3\text{x} = \frac{1}{4}$$

27. $\dfrac{\left(\mathrm{Sec}^2 x-1\right)Ctgx}{Tagx\; Senx+Cosx}-\dfrac{3}{2}Sen\, x\, Tag^2\left(2\,x-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

28. $\mathrm{sen}^3 x\cos x-senx\cos^3 x+\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)sen4x=0$

29. $\dfrac{\left(\sec^2 x-1\right)ctgx}{tgx\; senx+\cos x}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)sen\, x=0$

30. $\mathrm{sen}^3 x-\dfrac{4}{5}\sec^2 x\, sen^3 x+\dfrac{3}{5}sen^2 x-\dfrac{12}{25}tg^2 x-7senx\cos^2 x+\dfrac{28}{5}senx-\dfrac{21}{5}\cos^2 x-\dfrac{84}{25}=0$

CAPÍTULO 8 APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA

8.1. Ley de los senos

Un triángulo oblicuángulo es aquel que no contiene un ángulo recto. Consideremos el triángulo oblicuángulo *ABC* representado en la figura 8.1, en el que β es un ángulo obtuso; entonces:

$$\frac{Sen\alpha}{\alpha}=\frac{Sen\beta}{\beta}=\frac{Sen\gamma}{\gamma}$$

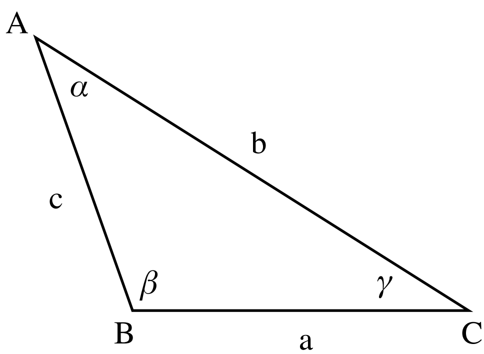


Figura 8.1. Triángulo *ABC*

De las igualdades anteriores, se deducen tres fórmulas:

$$\frac{Sen\alpha}{\alpha}=\frac{Sen\beta}{\beta} \qquad \frac{Sen\alpha}{\alpha}=\frac{Sen\gamma}{\gamma} \qquad \frac{Sen\beta}{\beta}=\frac{Sen\gamma}{\gamma}$$

La ley de los senos se utiliza para hallar las partes de un triángulo oblicuángulo si se conoce:

- Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.
- Dos ángulos y cualquier lado.

NOTA: la ley de los senos también es válida si es un ángulo agudo.

Ejemplos.

1. Consideremos el triángulo *ABC*, dados $\alpha = 36º$, $\beta = 80$ y $c = 6.4$, hallar los demás elementos.

En el triángulo de la figura 8.2, el ángulo se deducen a partir de: $\delta = 180º - 36º - 80º = 64º$.

Utilizando la ley de los senos hallamos *a*

$$\frac{Sen\,64º}{6{,}4} = \frac{Sen\,36º}{a} \Rightarrow a = \frac{6.4\,Sen\,36º}{Sen\,64º} = 4.19$$

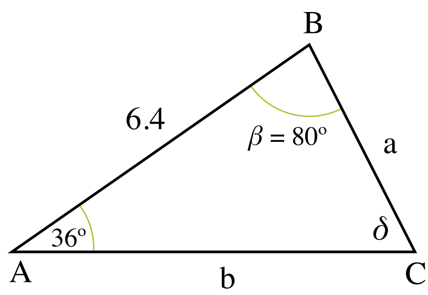


Figura 6.2. Triángulo *ABC*

Para determinar *b* utilizamos:

$$\frac{Sen\,80º}{b} = \frac{Sen\,64º}{6{,}4} \Rightarrow b = \frac{6{,}4\,Sen\,80º}{Sen\,64º} = 7{,}01$$

2. Consideremos el triángulo *ABC*, dados $\alpha = 39{,}14º$, c = 5,39 y $a = 7$, hallar los demás elementos.

En el triángulo de la figura 8.3, para hallar el ángulo θ utilizando la ley de los senos:

$$\frac{Sen\,39{,}14º}{7} = \frac{Sen\,\theta}{5{,}39} \Rightarrow Sen\,\theta = \frac{5{,}39\,Sen\,39{,}14º}{7} = 0{,}486$$

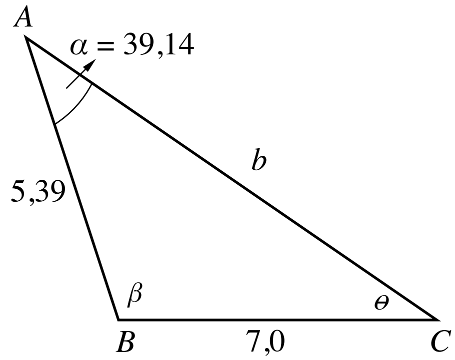


Figura 8. 3. Triángulo *ABC*

Para hallar el ángulo β utilizamos:

$\beta = 180^{\circ} - 39.14^{\circ} - 29.08^{\circ} = 111{,}78^{\circ}$

Finalmente, hallamos *b*, a partir de:

$$\frac{Sen\,111{,}78^{\circ}}{b} = \frac{Sen\,39{,}14^{\circ}}{7} \Rightarrow b = \frac{7\,Sen\,111{,}78^{\circ}}{Sen\,39{,}14^{\circ}} = 10{,}30$$

3. Una persona, ubicada a 20 m de la base de un árbol, observa con un ángulo de elevación de 45º la parte superior del árbol inclinado en la dirección N14ºE. Hallar la altura del árbol y la distancia del observador a la copa del mismo.

En el triángulo de la figura 6.4, los ángulos *B* y *C* se deducen a partir de: $B = 90^{\circ} - 14^{\circ} = 76^{\circ}$ y $C = 180^{\circ} - 76^{\circ} - 45^{\circ} = 59^{\circ}$. Utilizando la ley de los senos hallamos *p* que representa la altura del árbol, es decir:

$$\frac{Sen\,59^{\circ}}{20} = \frac{Sen\,45^{\circ}}{p} \Rightarrow p = \frac{20\,Sen\,45^{\circ}}{Sen\,59^{\circ}} = 16.50\,m$$

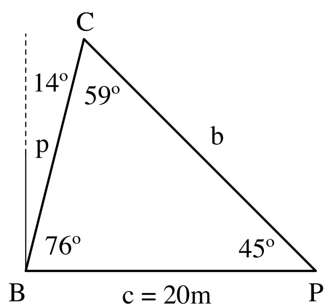


Figura 8.4. Triángulo *ABC*

Para determinar la distancia del observador a la copa del árbol utilizamos:

$$\frac{Sen76^{\circ}}{b}=\frac{Sen45^{\circ}}{16{,}50} \Rightarrow b=\frac{16,50\ Sen\ 76^{\circ}}{Sen\ 45^{\circ}}=22{,}64m$$

4. Un cazador que se encuentra en la parte más alta de la montaña observa con un ángulo de depresión de 30º un lobo que se halla a 80 m de una liebre. La liebre se encuentra a 42 m en línea de aire con el cazador. Hallar el ángulo de depresión con el que el cazador observa a la liebre, y la distancia entre el cazador y el lobo.

En el triángulo de la figura 8.5, el ángulo L es igual al ángulo de depresión, esto por ser alternos internos.

Para hallar el ángulo BCL utilizamos:

$$\frac{Sen\ \hat{BCL}}{80}=\frac{Sen30^{\circ}}{42} \Rightarrow Sen\ \hat{BCL}=\frac{80Sen30^{\circ}}{42} \Rightarrow Sen\ \hat{BCL}=0.9524 \Rightarrow \hat{BCL}=72.25^{\circ}$$

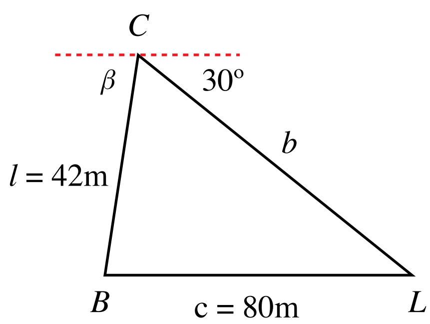


Figura 8.5. Triángulo *BLC*

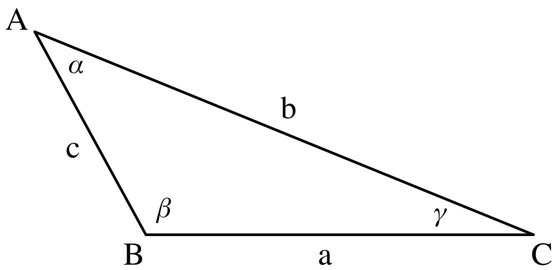
Para determinar el ángulo $B = 180^{\circ} - 72{,}25^{\circ} - 30^{\circ} = 77{,}75^{\circ}$, de este resultado se concluye que el ángulo de depresión con el que el cazador observa la liebre es $\beta = 77{,}75^{\circ}$; y la distancia entre el cazador y el lobo es:

$$\frac{Sen\ 77,75^{\circ}}{b}=\frac{Sen30^{\circ}}{42} \Rightarrow b=\frac{42Sen\ 77,75^{\circ}}{Sen30^{\circ}} \Rightarrow b=82{,}09m$$

8.2. Ley de los cosenos

La ley de los senos, estudiada en la sección anterior, no se puede utilizar para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuo, cuando nos dan dos lados y el ángulo entre ellos o se conocen los tres lados. Para estos casos aplicamos la ley de los cosenos que enunciamos a continuación:

Consideremos el triángulo oblicuo ABC representado en la figura 8.6; entonces:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b\ c\ Cos\ \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ a\ c\ Cos\ \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a\ b\ Cos\ \gamma$$

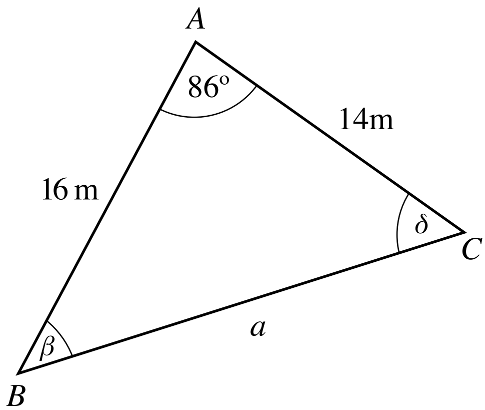
Figura 8.6. Triángulo oblicuo ABC

Dados dos lados y el ángulo entre ellos, podemos usar la ley de los cosenos para hallar el tercer lado y a continuación recurrir a la ley de los senos para hallar otro ángulo, en lo posible es mejor determinar el ángulo opuesto al lado más corto, ya que siempre es agudo. De este modo evitamos la posibilidad de obtener dos soluciones cuando se despeja una ecuación trigonométrica que comprende ese ángulo. Cuando se conocen los tres lados del triángulo y utilizamos la ley de los cosenos para hallar uno de los ángulos, se recomienda que encontremos primero el ángulo más grande, es decir, el ángulo opuesto al lado más largo; luego se puede usar la ley de los cosenos o senos para buscar los otros.

Ejemplos

1. Consideremos el triángulo ABC (ver figura 8.7), dados a=86, b=14m y c=16m, hallar los demás elementos.

Para hallar la longitud de a aplicamos la ley de los cosenos.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos\ a$$
$$a^2 = (14)^2 + (16)^2 - 2(14)(16)\ Cos\ 86º$$
$$a^2 = 420{,}75 \Rightarrow a = 20{,}51\ m$$

Figura 8.7. Triángulo *ABC*

Para determinar el ángulo β aplicamos la ley de los senos:

$$\frac{Sen\,86^\circ}{20{,}51} = \frac{Sen\,\beta}{14} \Rightarrow Sen\,\beta = \frac{14 Sen\,86^\circ}{20{,}51} \Rightarrow Sen\,\beta = 0{,}681 \Rightarrow \beta = 42{,}92^\circ$$

El ángulo δ lo hallamos a partir de: $\delta = 180º - 86º - 42{,}92º = 51{,}08º$

2. Consideremos el triángulo *ABC*, dados $a = 5{,}1$, $b = 8$ y $c = 8{,}6$, hallar los valores de los ángulos, α, β y δ.

A partir de la ley de los cosenos, hallaremos α, ver figura 8.8.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b\ c\ Cos$$

$$Cos\,\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

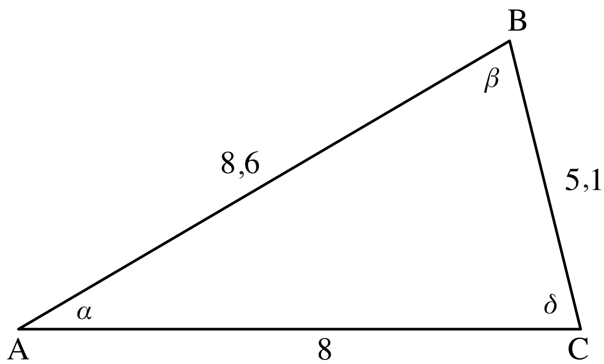


Figura 8.8. Triángulo *ABC*

$$Cos\,\alpha = \frac{8^2 + 8,6^2 - 5,1^2}{2\,(8)(8,6)}$$

Cos α =0,814 $\Rightarrow$ α =Cos^{-1}(0,814) $\Rightarrow$ α =35,55º

Para determinar β, aplicamos la ley de los senos:

$$\frac{Sen\,35{,}55^\circ}{5\ 1} = \frac{Sen\,\beta}{8} \Rightarrow \ Sen\,\beta = \frac{8Sen\,35{,}55^\circ}{5\ 1} \Rightarrow \ Sen\,\beta = 0{,}912 \Rightarrow \ \ \beta = 65{,}79^\circ$$

El ángulo δ lo hallamos a partir de: δ= 180º – 65,79º – 35,55º = 78,66º

3. Una persona ubicada a 35 m de la base de un árbol observa con un ángulo de elevación de 46º la parte superior del árbol inclinado, que se encuentra a 40 m en línea aire con respecto al observador. Hallar el ángulo de inclinación del árbol y la altura del mismo (ver figura 8.9).

Para hallar la altura del árbol aplicamos la ley de los cosenos.

$p^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ Cos α

$p^2 = (40)^2 + (35)^2 - 2(40)(35)$ *Cos* 46º

$p^2 = 879{,}96 \Rightarrow p = 29{,}66$ *m*

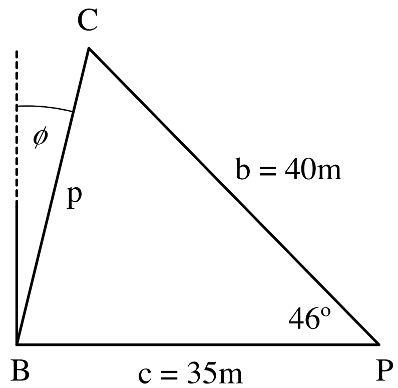


Figura 8. 9. Triángulo *BPC*

De la fórmula de la ley de cosenos, despejamos *Cos* B para determinar el ángulo de inclinación del árbol.

$$b^2 = p^2 + c^2 - 2\,p\,c\ \ Cos\,B \Rightarrow\ \ Cos\,B = \frac{p^2 + c^2 - b^2}{2\,p\,c}$$

$$Cos\,B = \frac{(29{,}66)^2 + (35)^2 - (40)^2}{2\,(29{,}66)(35)} \Rightarrow\ \ Cos\,B = 0{,}243 \Rightarrow\ \ \mathrm{B} = 75.94^{\circ}$$

Por lo tanto, el ángulo de inclinación del árbol es 75,94º. En coordenadas geográficas la inclinación del árbol es $\emptyset = N\,14{,}06\,^{\circ}\,\mathrm{E}$.

4. Hallar los ángulos internos del terreno triangular de la figura 8.10.

Para determinar los ángulos de los vértices *R*, *P* o *Q* utilizamos la ley de los cosenos:

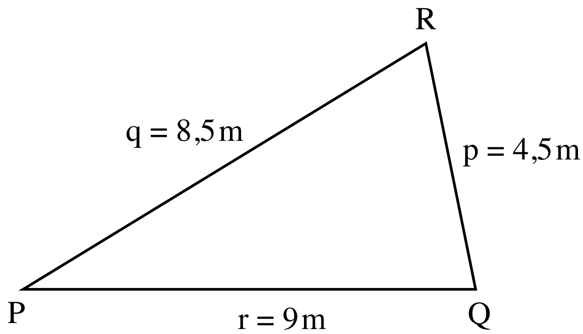


Figura 8.10. Triángulo *PQR*

De $p^2 = q^2 + r^2 - 2qr\ Cos\ P$ despejamos $Cos\,P = \dfrac{q^2 + r^2 - p^2}{2\,q\,r}$ para hallar el ángulo $Cos\,P = \dfrac{(8{,}5)^2 + (9)^2 - (4{,}5)^2}{2\,(8{,}5)\,(9)}$, entonces $Cos\ P = 0{,}8693 \Rightarrow P = 29{,}62^{\circ}$. Para encontrar el ángulo R, utilizamos la ley de los senos: $\dfrac{SenP}{p} = \dfrac{SenR}{r}$

$$SenR = \frac{rSenP}{p} = \frac{9Sen(29{,}62^{\circ})}{4{,}5} \Rightarrow\ \ SenR = \ 0{,}9885 \Rightarrow\ \ R = 81{,}30^{\circ}$$

Para el ángulo *Q* utilizamos: $Q = 180^{\circ} - R - P \Rightarrow\ \ Q = 180^{\circ} - 81{,}30^{\circ} - 29{,}62^{\circ} = 69{,}08^{\circ}$

8.3. Área de un triángulo

A partir de la ley de los cosenos se puede derivar una fórmula para encontrar el área de un triángulo (ver figura 8.11), que es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos lados cualesquiera y el seno del ángulo entre ellos.

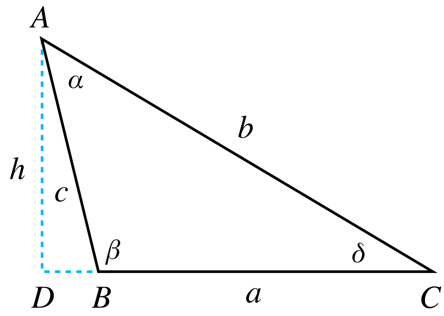


Figura 8.11. Triángulo *ABC*

Si construimos la altura h del triángulo *ABC* a partir del vértice *A*, se deduce que: h=b sen γ , y como el área de un triángulo es

$$\mathrm{A} = \frac{ah}{2} = \frac{absen\delta}{2}$$

Si construimos la altura h del triángulo *ABC* a partir del vértice *B* (ver figura 8.12), se tiene que: $h = c\ sen\alpha$, entonces el área del triángulo es

$$A = \frac{b\,h}{2} = \frac{b\,c\,sen\,\alpha}{2}$$

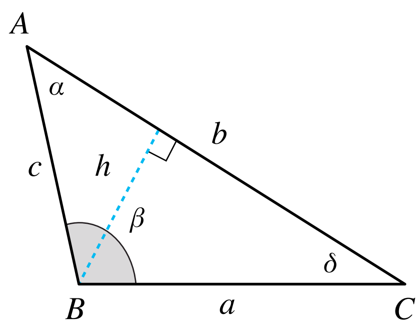


Figura 8.12. Triángulo *ABC*

En forma análoga, al construir la altura h a partir del vértice C, se tiene que:

$$\begin{aligned} h &= a sen(180 - \beta) \\ &= a\,[sen(180\,)cos(\,\beta\,) - sen(\,\beta\,)cos(180^o\,)] \\ h &= a\ sen(\,\beta\,) \end{aligned}$$

Entonces, el área del triángulo es $A = \dfrac{ch}{2} = \dfrac{ac\ sen(\beta)}{2}$

El área de un triángulo también se puede hallar a partir de la fórmula de Herón.

FÓRMULA DE HERÓN

El área de un triángulo ABC representado en la figura 8.11, está dado por:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ ,$$

donde s es el semiperímetro y está definido por : $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

Ejemplos

1. Hallar el área del triángulo ABC representado en la figura 8.13.

Para hallar el área del triángulo, necesitamos la longitud del lado a y el valor del ángulo C.

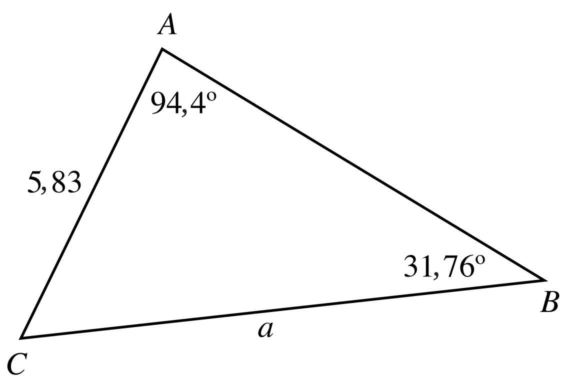


Figura 6.13. Triángulo

Hallemos la longitud de a utilizando la ley de los senos:

$$\frac{sen\,94{,}4^\circ}{a}=\frac{sen\,31{,}75^\circ}{5{,}83}\Rightarrow\ a=\frac{5.83sen\,94{,}4^\circ}{sen\,31{,}75^\circ}=11{,}05$$

El valor de C lo determinamos a partir de C = 180º – 94,4º– 31,76º = 53,84º. Entonces el área del triángulo ABC es:

$$A=\frac{(11{,}05)(5{,}83)\,sen\,53{,}84^\circ}{2}=26{,}01\,u^2$$

2. Hallar el área del triángulo ABC representado en la figura 8.14.

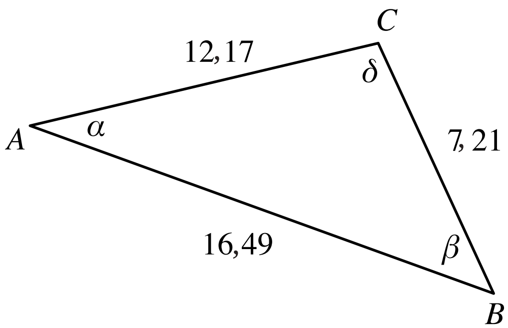


Figura 8.14. Triángulo ABC

Para hallar el área del triángulo, necesitamos el valor de cualquiera de los ángulos. Hallemos el valor del ángulo α aplicando la ley de los cosenos:

$$(7{,}21)^2=(12{,}17)^2+(16{,}49)^2-2(12{,}17)(16{,}49)\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{(12{,}17)^2+(16{,}49)^2-(7{,}21)^2}{2(12{,}17)(16{,}49)}$$

cos α = 0,917 $\quad\alpha$ = 23,51.

Entonces el área del triángulo ABC es:

$$A=\frac{(12{,}17)(16{,}49)\,sen\,23{,}51^\circ}{2}=40{,}03\,u^2$$

3. Hallar el área del triángulo ABC representado en la figura 8.15.

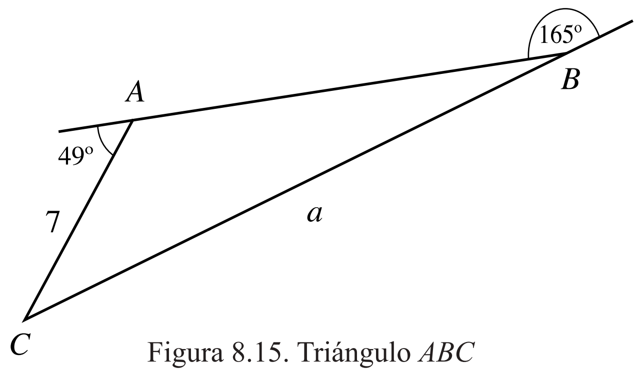


Figura 8.15. Triángulo ABC

Para hallar el área del triángulo necesitamos la longitud del lado a y el valor del ángulo C.

Primero hallamos los valores de los ángulos A y B:

$A = 180° - 49° = 131°$
$B = 180° - 165° = 15°$

El valor de C lo determinamos a partir de $C = 180° - 131° - 15° = 34°$.

Para hallar la longitud de a utilizando la ley de los senos:

$$\frac{sen\,131^\circ}{a} = \frac{sen\,15^\circ}{7} \Rightarrow a = \frac{7sen\,131^\circ}{sen\,15^\circ} = 20.41$$

Entonces el área del triángulo ABC es:

$$A = \frac{(7)(20{,}41)\,sen\,34^\circ}{2} = 39{,}95\,u^2$$

4. Hallar el área del triángulo ABC utilizando la fórmula de Herón.

Para hallar el área del triángulo representado en la figura 8.16, necesitamos la longitud del lado b y el valor del ángulo B.

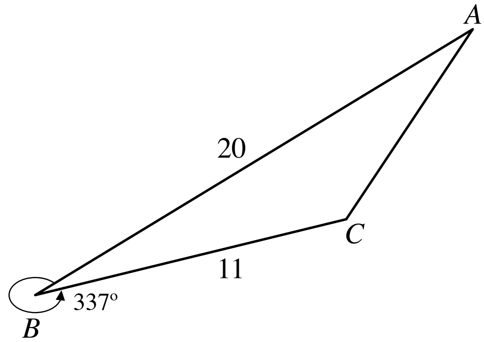


Figura 8.16. Triángulo *ABC*

Hallemos el valor del ángulo *B***:**
B=360º −337º =23º

Para determinar la longitud de *b*, aplicaremos la ley de los cosenos:
$b^2 = (20)^2 + (11)^2 - 2(20)(11)\cos 23º \Rightarrow b = 10{,}77$

El valor del semiperímetro $s = \dfrac{20+11+10{,}77}{2} = 20{,}89$

Entonces el área del triángulo *ABC* es $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$A = \sqrt{20{,}89(20{,}89-20)(20{,}89-11)(20{,}89-10{,}77)} = 43\ 14\ u^2$$

5. Hallar el área del triángulo *ABC* utilizando la fórmula de Herón.

El valor del semiperímetro del triángulo *ABC* representado en la figura 8.17 es:

$$s = \frac{12{,}17+16{,}49+7{,}21}{2} = 17{,}94$$

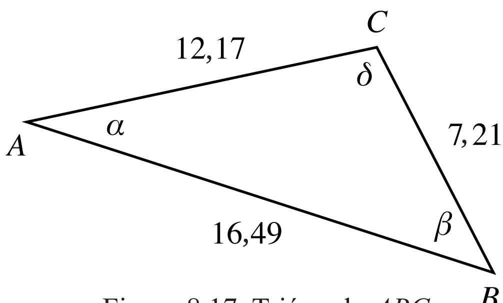


Figura 8.17. Triángulo *ABC*

Entonces el área del triángulo *ABC* es:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$A = \sqrt{17{,}94(17{,}94-12{,}17)(17{,}94-16{,}49)(17{,}94-7{,}21)} = 40{,}13\ u^2$$

6. Hallar el área del triángulo *ABC* representado en la figura 8.18 utilizando la fórmula de Herón

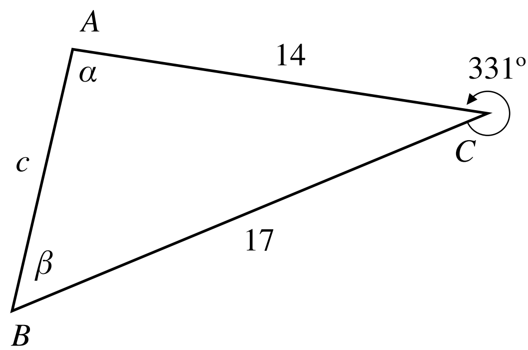


Figura 8.18. Triángulo *ABC*

Para hallar el área del triángulo necesitamos la longitud del lado c y el valor del ángulo *C*.

Hallemos el valor del ángulo *C*:

$B = 360º - 331º = 29º$

Para determinar la longitud de *c*, aplicaremos la ley de los cosenos:

$c^2 = (14)^2 + (17)^2 - 2(14)(17)\cos 29º \Rightarrow c = 8,29$

El valor del semiperímetro $s = \dfrac{14+17+8{,}29}{2} = 19{,}65$

Entonces el área del triángulo *ABC* es:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$A = \sqrt{19{,}65(19{,}65-14)(19{,}65-17)(19{,}65-8{,}29)} = 57{,}81\,u^2$$

7. Hallar el área del triángulo PQR si $R = 81{,}30^o$, p = 4,5m y q = 8,5m

Aplicando la fórmula del área $A = \dfrac{pq\,senR}{2} = \dfrac{(4.5m)(8.5m)\,sen\,81{,}30^\circ}{2} = 18{,}90\,m^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS 8.1

1. Dada la figura 8.19 calcular:
a) Área del triángulo.
b) Longitud de d en función de h, α y β
c) Longitudes de k y d si:

h=125, α=30 y β=45

d) Las longitudes de AC y BC.

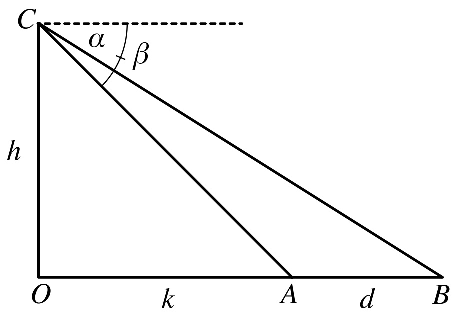


Figura 6.19. Triángulo ABC

2. En la figura 8.20, los ángulos α y β son suplementarios, hallar:
a) Los valores de los ángulos α, β, δ, ϕ y θ
b) Las longitudes de los segmentos AB, BC Y BD

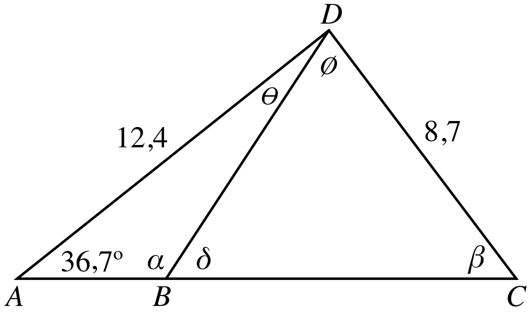


Figura 8.20. Triángulo ACD

3. Dada la figura 8.21, calcular:
a) h en términos de h_1, d, α y β
b) h si h_1=7, d=124, α =15 y β =31,4
c) Las valores de AD y FE

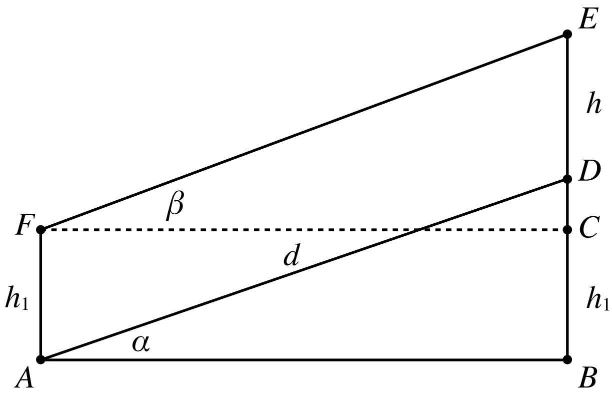


Figura 8.21

4. En la figura 8.22 los ángulos α y β son de depresión:
a) Demostrar que $L = h\,(Ctg\,\alpha + Ctg\,\beta) - (d_1 + d_2)$
b) Calcular h si: $\alpha = 47^o$, $\beta = 36^o$, $L = 250$ y $d_1 = d_2 = 170$

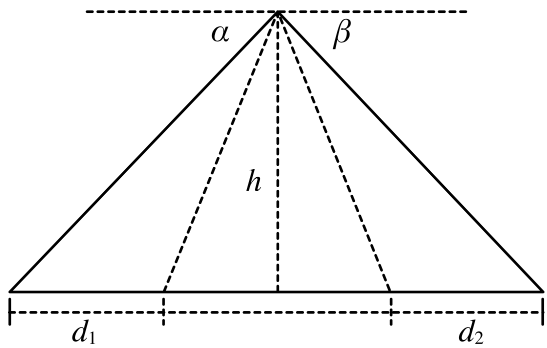


Figura 6.22

5. En la figura 8.23 CBE=48 y AB=250, hallar:
a) Los valores de los ángulos $\alpha, \beta, \delta, \phi$ y θ.
b) Las longitudes de los segmentos BC, CD, DE, BE y AE.

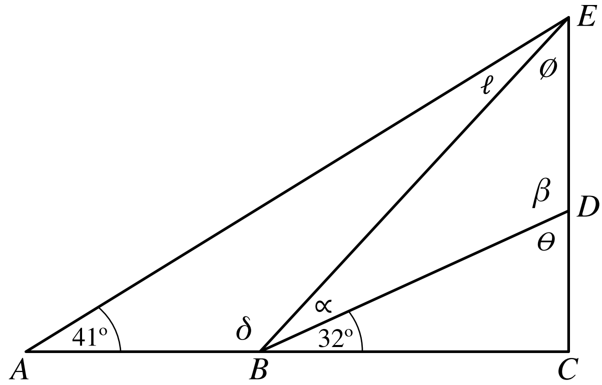


Figura 8.23. Triángulo *ACE*

6. En la figura 8.24, *EF*=1000 y *AF*=5210.
a) Hallar los valores de los ángulos α, β, δ, ϕ y θ.
b) Las longitudes de los segmentos *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *BD* y *BD*.

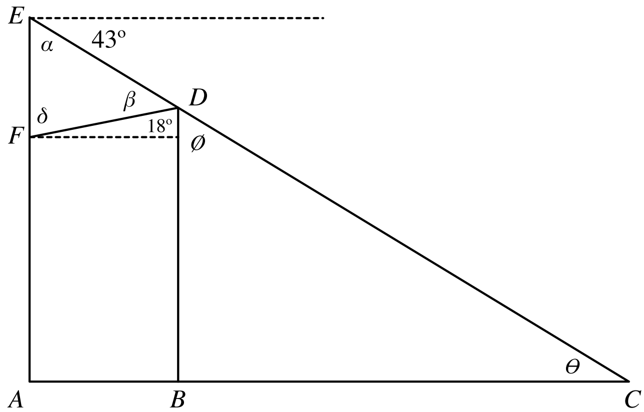


Figura 8.24. Triángulo *ACE*

7. Dada la figura 8.25:
a) Calcular la altura *h* en términos de α, θ y *d* y dejar expresado en términos solo de la función seno.
b) Hallar *h*, si α=30 , θ=20 y d=20.

8. En la figura 6.26, el ángulo $B\hat{A}D$ = 72º.
a) Halle las medidas de todos los ángulos en los cuatro triángulos.
b) Calcular las longitudes de los segmentos *DE*, *EB* y *AE*.
c) Calcular el área de los polígonos *BEDC* y *ABED*.

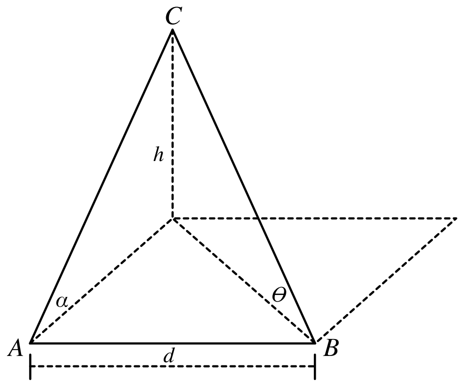


Figura 8.25 Triángulo *ABC*

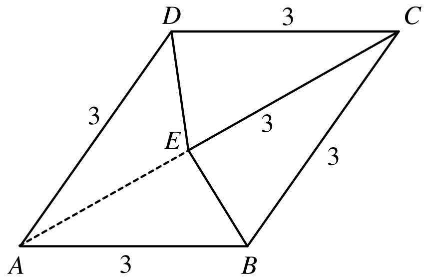


Figura 8.26 Rombo *ABCD*

9. Considere la pirámide de base cuadrada y caras triangulares congruentes, ver figura 8.27.

Sea α el ángulo que la altura h_1 de una cara triangular hace con la altura h_2 de la pirámide, y sea x la longitud de un lado de la base.

Halle la superficie total de las cuatro caras en términos de h_1 y α

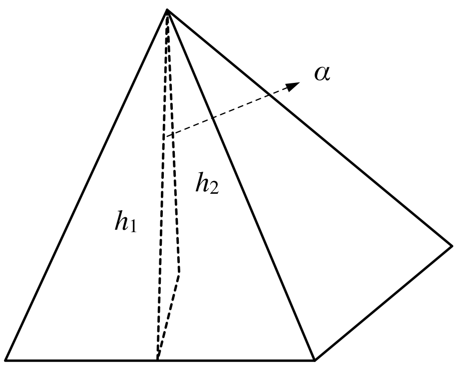


Figura 8.27. Pirámide

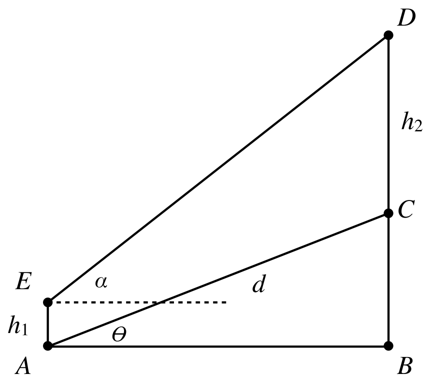


Figura 8.28

10. Dada la figura 8.28, calcular:

a) h_2 en términos de h_1, d, y

b) h_2 si $h_1 = 6.5$, $d = 60$, $\alpha = 36°$ y $\theta = 17°$

c) Los valores de *AB*, *BC* y *ED*

11. Dada la figura 8.29, calcular:

a) La longitud de *AB* y h_2 en términos de h_1 α y β

b) La longitud de AB, AC, DC y h_2 si $h_1 = 50$, $\alpha = 63^\circ$ y $\beta = 6^\circ$
c) El valor del ángulo DCB.

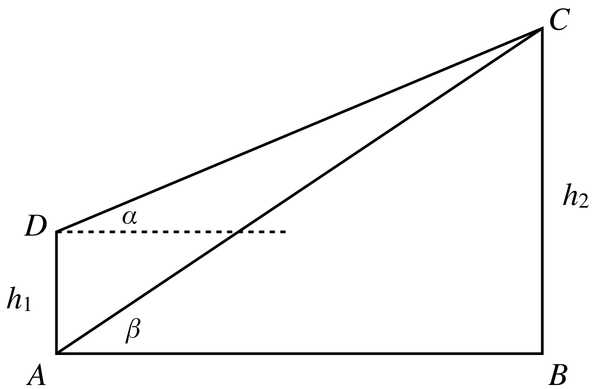


Figura 8.29. Triángulos

12. Considere los triángulos *ABC* representados en las figuras, con las condiciones indicadas, y halle los elementos que falten, según sea el caso.

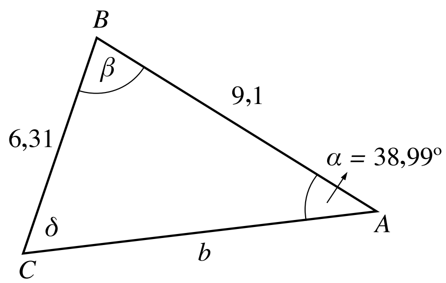


Figura 8.30. Triángulo *ABC*

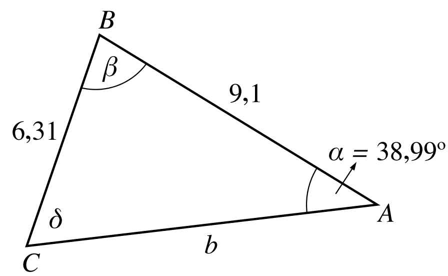


Figura 8.31. Triángulo *ABC*

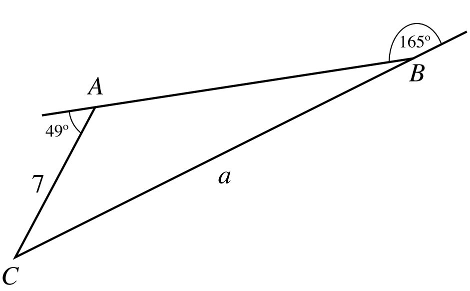


Figura 8.32. Triángulo *ABC*

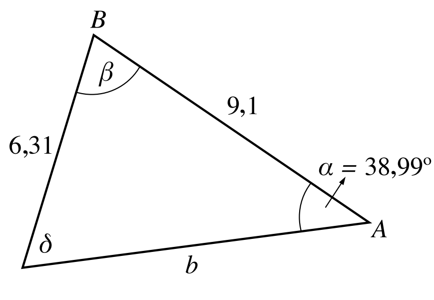


Figura 8.33. Triángulo *ABC*

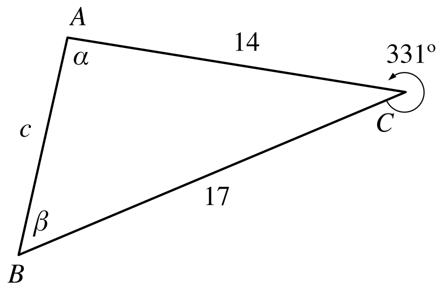


Figura 8.34. Triángulo *ABC*

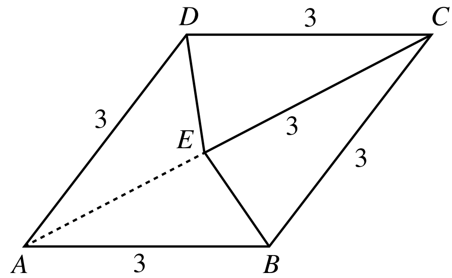


Figura 8.35. Triángulo *ABC*

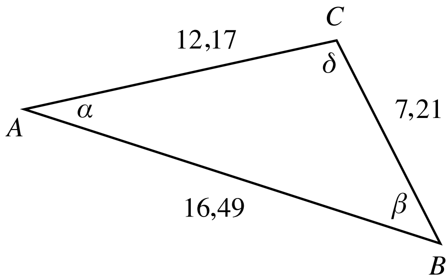


Figura 8.36. Triángulo *ABC*

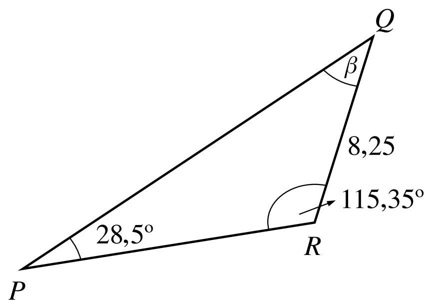


Figura 8.37. Triángulo *ABC*

13. Considere los triángulos ABC, con las condiciones indicadas, y halle su área.

a) Dado el triángulo *ABC* con a=15,81, b=26,93 y c=18,03
b) Dado el triángulo *ABC* con A=34,51 , B=105,26 y a=15,81
c) Dado el triángulo *ABC* con a=30,31, b=35,94 y c=13,67
d) Dado el triángulo *ABC* con C=21,75 , B=103 y b=35,94
e) Dado el triángulo *ABC* con a=53,26, b=55,49 y c=7,12
f) Dado el triángulo *ABC* con A=68,21 , C=7,14 y c=7,12
g) Dado el triángulo *ABC* con a=24,99, b=42,86 y c=24,91
h) Dado el triángulo *ABC* con A=30,86 , B=118,4 y a=24,99
i) Dado el triángulo *ABC* con a=50, b=50 y c=50

14. Considere los triángulos *ABC* con las condiciones indicadas y halle su área aplicando la fórmula de Herón.

a) Dado el triángulo *ABC* con a=15,81, b=26,93 y C=40,24
b) Dado el triángulo *ABC* con B=105,26 , b=26,93 y =40,24

c) Dado el triángulo ABC con a=30,31, B=103 y c=13,67
d) Dado el triángulo ABC con C=21,75 , A=55,25 y a=30,31
e) Dado el triángulo ABC con A=68,21 , b=55,49 y c=7,12
f) Dado el triángulo ABC con B=104,66, C=7,14 y b=55,49
g) Dado el triángulo ABC con a=24,99, b=42,86 y C=30,74
h) Dado el triángulo ABC con A=30,86, C=30,74 y c=24,91
i) Dado el triángulo ABC con a=100, b=100 y A=60
j) Dado el triángulo ABC con A=45 , B=45 y a=75

APÉNDICES

A. Fórmulas básicas del álgebra

PRODUCTOS NOTABLES

$(x+a)(x+b)= x^2 +(a+b)x+ab$

$(x+ y)(x- y)= x^2 - y^2$

$(ax+by)(cx+dy)=acx^2 +(ad+bc)xy+bdy^2$

$(x+y)^2 =x^2 +2xy+y^2$

$(x-y-z)^2 =x^2 +y^2+y^2 -2xy-2xz+2yz$

$(x-y)^2 =x^2 -2xy+y^2$

$(x+y)^3 =x^3 +3x^2 y+3xy^2 +y^3$

$(x-y)^3 =x^3 -3x^2 y+3xy^2 -y^3$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

$ax+ay+az=a(x+y+z)$

$x^2 -y^2 =(x+y)(x-y)$

$x^3 +y^3 =(x+y)(x^2 -xy+y^2)$

$x^3 -y^3 =(x-y)(x^2 +xy+y^2)$

$x^2 +(a+b)xy+aby^2 =(x+ay)(x+by)$

$x^2 -2xy+y^2 =(x-y)^2$

$acx^2+(ad+bc)\, xy+bdy^2 = (\, ax+by)\, (cx+dy)$

$x^2 +2xy+y^2 =(x+y)^2$

$x^4 +y^4 =(x^4 +2x^2 y^2 +y^4)-2x^2 y^2 =(x^2 +y^2)^2-2x^2 y^2 =(x^2 -\sqrt{2x}y+y^2)(x^2 +\sqrt{2x}y+y^2)$

EXPONENTES Y RADICALES

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}$

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a^m.\, a^n = a^{m+n}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$a^0 = 1, \quad a \neq 0$

$(a^m)^n = a^{m.n}$

$(abc)^n = a^n b^n c^n$

BINOMIO DE NEWTON

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + n\,ab^{n-1} + b^n$$

B. Fórmulas básicas de la recta

Ecuación de la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

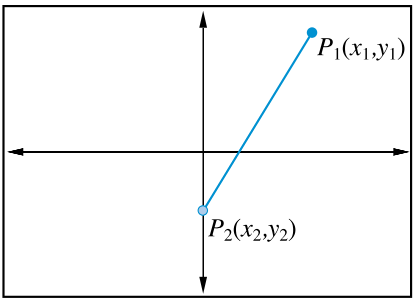


Figura 9.1. Segmento de recta

Ecuación de la recta dados dos puntos

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

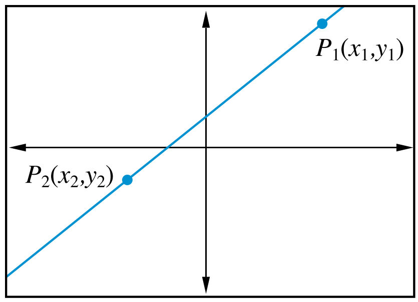


Figura 9.2. Recta entre dos puntos

Ecuación de la recta dada la pendiente y la intersección con el eje y

$$y = mx + b$$

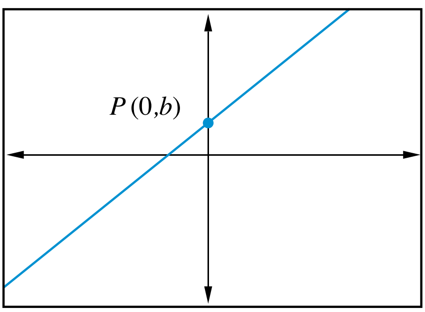


Figura 9.3 Recta con corte en el eje *y*

Ecuación de la recta dados las intersecciones con eje x y y

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

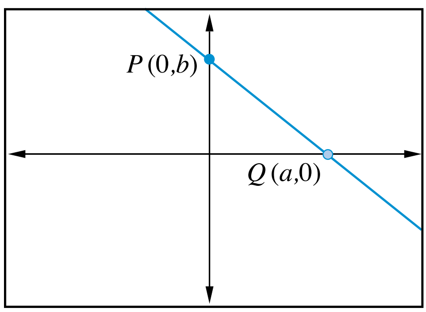
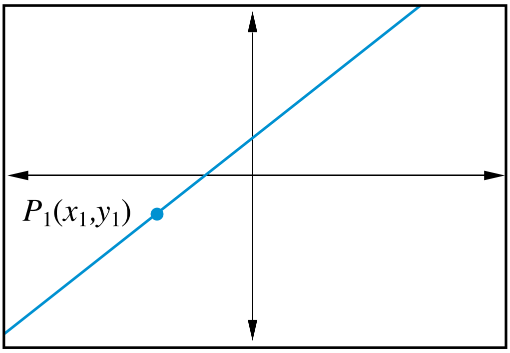


Figura 9.4. Recta con cortes en eje *x* e *y*



Ecuación de la recta dado un punto y la pendiente m

$y-y_1 = m\,(x-x_1)$

Figura 9.5. Recta conocido un punto y m

C. Fórmulas básicas de las cónicas

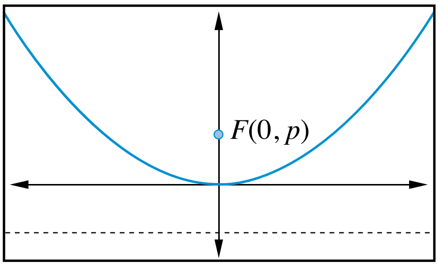


Figura 9.6. Parábola hacia arriba

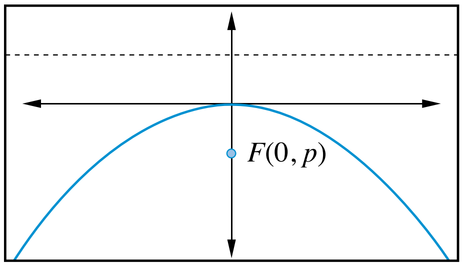


Figura 9.7. Parábola hacia abajo

$$y = \frac{1}{4p}x^2, \quad p > 0$$

$$y = \frac{1}{4p}x^2, \quad p < 0$$

Vértice $V(0,0)$. Foco $F\,(0,p)$

Directriz $y=-p$

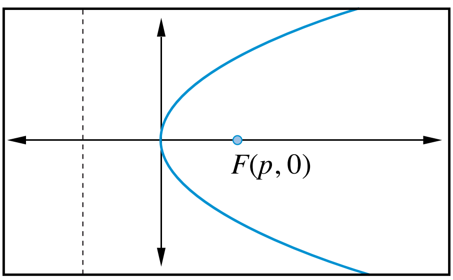


Figura 9.8. Parábola hacia a la derecha

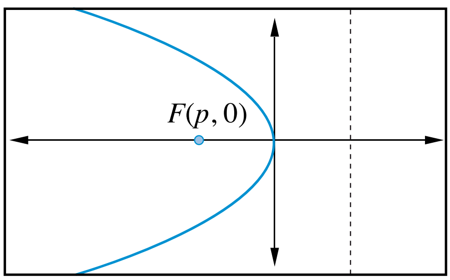


Figura 9.9. Parábola hacia a la izquierda

$$x=\frac{1}{4p}y^2, \quad p>0$$

$$x=\frac{1}{4p}y^2, \quad p<0$$

Vértice $V(0,0)$. Foco $F(p,0)$ **Directriz** $x=-p$

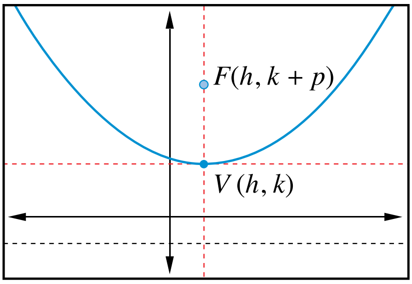


Figura 9.10. Parábola hacia arriba

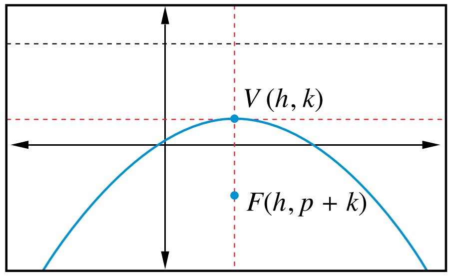


Figura 9.11. Parábola hacia abajo

$$y=\frac{1}{4p}(x-h)^2+k, \quad p>0$$

$$y=\frac{1}{4p}(x-h)^2+k, \quad p<0$$

Vértice $V(h,k)$ **Foco** $F(h,k+p)$ **Directriz** $y=h-p$

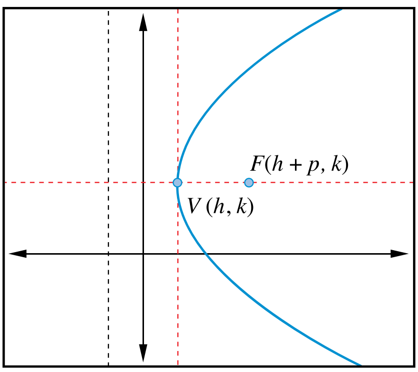


Figura 9.12. Parábola hacia a la derecha

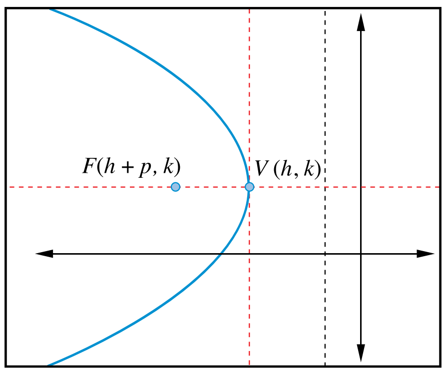


Figura 9.13. Parábola hacia a la izquierda

$$x=\frac{1}{4p}(y-k)^2+h, \quad p>0$$

$$x=\frac{1}{4p}(y-k)^2+h, \quad p<0$$

Vértice $V(h,k)$ **Foco** $F(h+p,k)$ **Directriz** $x=h-p$

Radio vector: recta que pasa por un punto $P(x, y)$ de la parábola y por el foco $F(0, p)$ de la misma.

Lado recto: segmento de recta paralelo a la directriz y que pasa por el foco $F(0, p)$, su longitud es igual a $|4p|$

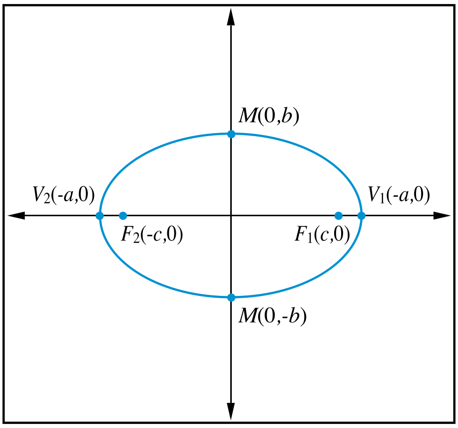


Figura 9.14. Elipse con centro el origen

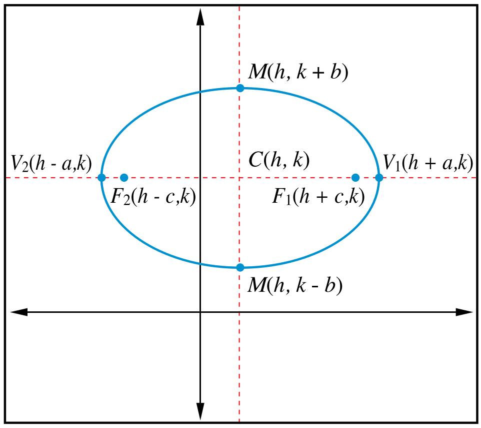


Figura 9.15. Elipse con centro fuera del origen

Centro $C(0,0)$; $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Centro $C(\mathrm{h},\mathrm{k})$; $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Vértices $V_1\,(a{,}0)$ $V_2\,(-a{,}0)$

Vértices $V_1\,(h{+}a{,}k)$ $\mathrm{V}_2\,(h{-}a{,}k)$

Focos $F(c{,}0)\;F\,(-c{,}0)$

Focos $F(h{+}c{,}k)$ $\mathrm{F}_2\,(h{-}c{,}k)$

Corte eje y: $M_1(0{,}b)\;M_2(0{,}-b)$ $M_1(h{,}k{+}b)$
$M_2(h{,}k{-}b)$

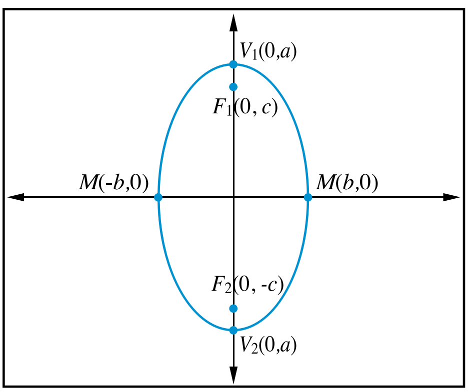


Figura 9.16. Elipse con centro el origen

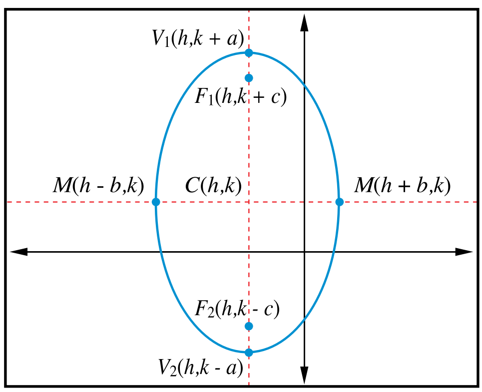


Figura 9.17. Elipse con centro fuera del origen

Centro $C(0,0)$; $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$

Vértices $V_1\,(0,a)$ $\qquad V_2\,(0,-a)$

Focos $F(0,c)$ $\qquad F\,(0,-c)$

Centro $C(h,k)$; $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Vértices $V_1\,(h,k+a)$ $\qquad V_2\,(h,k-a)$

Focos $F(h+c,k)$ $\qquad F_2\,(h-c,k)$

Corte eje x: $M_1\,(b,0)$ $M_2\,(-b,0)$ $\qquad M_1\,(h+b,k)$
$M_2(h-b,k)$

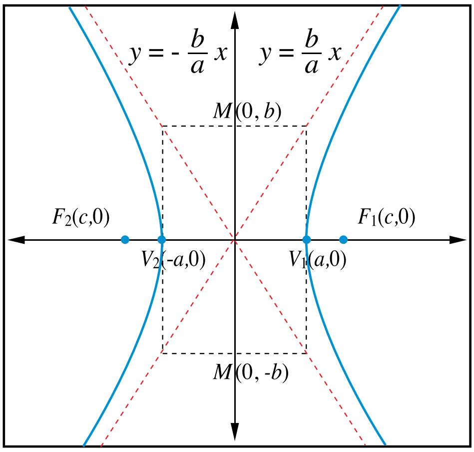


Figura 9.18. Hipérbola con centro el origen

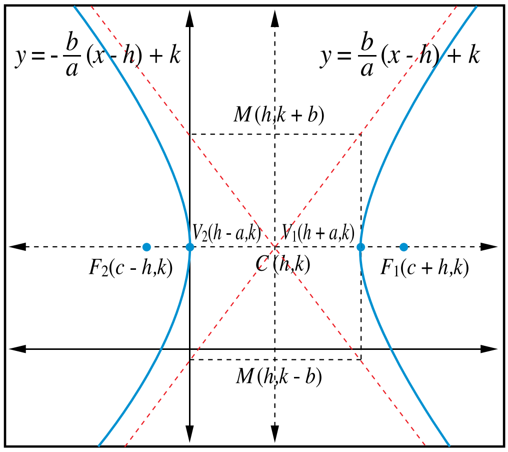


Figura 9.19. Hipérbola con centro fuera del origen

Centro $C(0,0)$; $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Vértices $V_1\,(a,0)$ $\qquad V_2\,(-a,0)$

Focos $F_1\,(c,0)$ $\qquad F_2\,(-c,0)$

Asíntotas $y=-\dfrac{b}{a}x$ $\qquad y=\dfrac{b}{a}x$

Centro $C(h,k)$; $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Vértices $V_1\,(h+a,k)$ $\qquad V_2\,(h-a,k)$

Focos $F_1(h+c,k)$ $\qquad F_2(h-c,k)$

$y=-\dfrac{b}{a}(x-h)+k$ $\qquad y=\dfrac{b}{a}(x-h)+k$

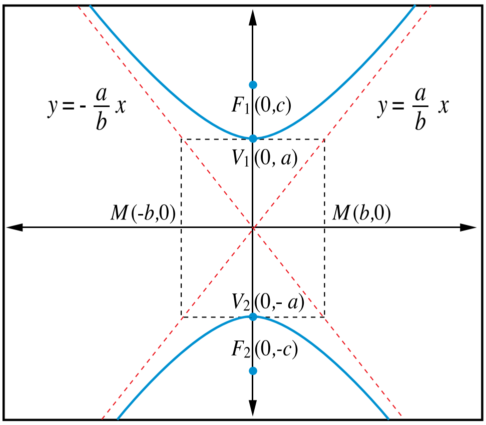


Figura 9.20. Hipérbola con centro el origen

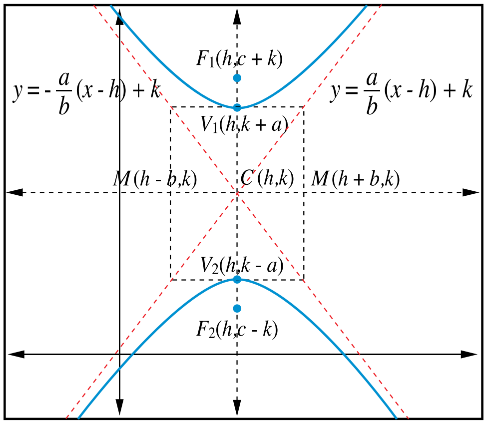


Figura 9.21. Hipérbola con centro fuera del origen

Centro $C(0,0)$; $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ **Centro** $C(h,k)$; $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

Vértices $V_1\ (0,a)$ $V_2\ (0,-a)$ **Vértices** $V_1\ (h+k,a)$ $V_2\ (h, k,-a)$

Focos $F_1\ (0,c)$ $F_2\ (0,-c)$ **Focos** $F_1(h+k,c)$ $F_2(h,k+c)$

Asíntotas $y = -\frac{a}{b}x$ $y = \frac{a}{b}x$ $y = -\frac{a}{b}(x-h)+k$ $y = \frac{a}{b}(x-h)+k$

CAPÍTULO 2

EJERCICIOS 2.1

1. a. $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ b. $B=\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$

c. $C=\left\{\frac{-5+i\sqrt{3}}{2},\frac{-5-i\sqrt{3}}{2}\right\}$ d. $E=(-\infty,-7)\cup(7,+\infty)$

e. D= ϕ f. G=$\{x\in\mathbb{N}\ /\ x=3^{o},n\geq 0\}$

g. $F=\{x\in\mathbb{N}\ /2\leq x\leq 12;\ x\ par\}$

5.a. $(A-B)\cup(B\cap C)-(A\cap B\cap C)$
b. $(A\cup B\cup C)^{C}\cup[A\cap C]$
c. $(A\cup B\cup C)-[C\cap(A\cup B)]$
d. $(C-B)-\cup[(A\cap B)-(A\cap B\cap C)]$
e. $(A\cup B\cup C)^{C}$
f. $[B-(A\cup C)]\cup[(A\cap C)-(A\cap B\cap C)]$
g. $[(B\cap C)\cup(A\cap D)]-(A\cap B\cap C\cap D)$
h. $(A\cap B\cap C\cap D)$
i. $[A-(B\cup C)]\cup[B-(A\cup D)]\cup[D-(B\cup C)]\cup[C-(A\cup D)]$
j. $(A\cup B\cup C\cup D)^{C}\cup\{[(A\cup D)\cap(B\cup C)]-[(B\cap C)\cup(A\cap D)]\}$
k. $[A-(B\cup C)]\cup[(D\cap C)-(A\cap B\cap C\cap D)]$
l. $(A\cup B\cup C\cup D)^{C}\cup(A\cap B\cap C\cap D)$

CAPÍTULO 4

EJERCICIOS 4.1

1. $\frac{4}{9}$ 3. $x_1=-1.3166,\ x_2=5.3166$

5. $x_1=-8.4031$, x=4.4031 7. -8

9. $-\frac{1}{12}$ 11. No existe solución

13. No existe solución 15. -5

17. $\frac{15}{49}$

19. $\frac{1}{4}$

21. 18 años tiene María

EJERCICIOS 4.2.

1. $x=8, \quad y=-9$

3. $x=\frac{46}{53}, \quad y=\frac{45}{53}$

5. $x=2, \quad y=1$

7. $x=\frac{137}{75}, \quad y=\frac{36}{25}$

9. $x=-\frac{27}{16}, \quad y=-\frac{135}{16}$

11. $x=\frac{13}{21}, \quad y=\frac{3}{7}$

13. $x_1=\frac{1}{2}, y_1=\frac{1}{3}; x_2=-\frac{1}{2}, y_2=\frac{1}{3}; x_3=\frac{1}{2}, y_3=-\frac{1}{3}; x_4=-\frac{1}{2}, y_4=-\frac{1}{3}$

15. $x=\frac{19}{4}, \quad y=\frac{1}{4}, \quad z=-\frac{1}{2}$

17. $x=\frac{40}{123}, y=-\frac{55}{123}, z=-\frac{59}{123}$

EJERCICIOS 4.3.

1. $x_1=-4, x_2=-7$

3. $x_1=1, \quad x_2=\frac{3}{4}$

5. $x_1=\pm 0,57735, \quad x_2=\pm 0,44721$

7. $\frac{3}{2}$

9. $x_1=-12,359, x_2=-3,6411$

11. $x_1=6, \quad x_2=2$

15. $x_1=4,2361, x_2=-2,1350, x_3=0,46837, x_4==-0,23607$

17. $x_1=\frac{7}{25}a, \quad x_2=\frac{9}{16}b$

BIBLIOGRÁFIA

Espinoza, E. (2010). *Análisis Matemáticos II, III y IV para estudiantes de ciencias e ingeniería*. Ciudad:Editorial

Haeusseler, E. y Paul, R. (2003). *Matemáticas para administración y economía*. Ciudad: Pearson Educación.

Lara, J. y Arroba, J. (2007). *Análisis Matemático.* 2.ª ed. Ciudad: Centro de Matemática Universidad. Segunda edición.

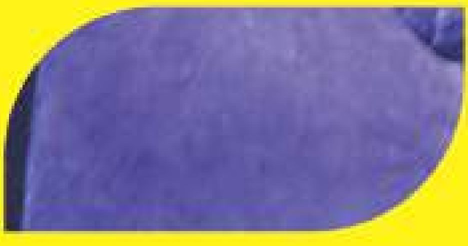
Salinas, G. (2014). *Álgebra Superior*. Ciudad: Editorial Soluciones Gráficas.

Stewart, J. Redlin, L y WATSON, S. (2012). *Matemáticas para el Cálculo*. 6.ª ed. Ciudad: Cengage Learning.

Swokowski, E y Cole, A. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13.ª ed. Ciudad: Cengage Learning.

Este libro de Matemática y trigonometría está estructurado en ocho capítulos que comprenden lógica proposicional; teoría de conjuntos; teoría de números; ecuaciones y desigualdades, relaciones y funciones, funciones exponenciales y logarítmicas; trigonometría; y aplicaciones de la trigonometría.
El propósito de este libro es proporcionar a estudiantes universitarios de los primeros semestres de las escuelas de ingeniería las herramientas necesarias para la resolución de problemas de matemática básica, que les servirán para posterio- res estudios de cálculo diferencial e integral. En este texto, solo se demuestran algunos de los teoremas que se presentan,en aquellos que no se hace la demostración, se hace énfasis en la correcta aplicación para resolver los ejercicios.
En cada unidad se trabaja con una gran variedad de problemas de diversos grados de dificultad, y se exponen todos los pasos que implica la resolución de estos,con la finalidad de ayudar al estudiante a comprender la teoría y que le den las bases necesarias para resolver los problemas aplicados..

Jorge Vinicio Tuapanta Dacto nació en Guano, provincia de Chimborazo. Es doctor en Matemática y Magister en Matemática Básica. Como parte de su experiencia docente, ha sido profesor del colegio Capitán Edmundo Chiriboga, profesor de la Universidad Particular de Loja y es docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, en la Facultad de Informática y Electrónica.



ISBN: 978-9942-35-639-0

9 789942 356390